সহজ বীজগণিত

প্রফেসর কে. পি. বসু প্রণীত

সরল বীজগণিত

দ্বিতীয় খণ্ড (Additional Course)—॥০

প্রফেসর কে. পি. বসু প্রণীত

এবং

প্রফেসর দেবপ্রসাদ ঘোষ

কর্ত্তৃক অনূদিত ও পুনর্লিখিত

আধুনিক জ্যামিতি

১ম-৪র্থ খণ্ড—১॥০

আধুনিক জ্যামিতি

৫ম খণ্ড—৸০

আধুনিক জ্যামিতির সমাধান—২

বঙ্গীয় গভর্ণমেণ্টের শিক্ষাবিভাগ কর্ত্তৃক বঙ্গদেশের উচ্চ ইংরাজী বিদ্যালয়সমূহের পাঠ্যরূপে অনুমোদিত (কলিঃ গেজেট, তাং ১৬।১২।৩৭)

সহজ বীজগণিত

ALGEBRA MADE EASY

(MATRICULATION ALGEBRA) গ্রন্থের

বাঙ্গালা সংস্করণ

[৭ম হইতে ১০ম শ্রেণীর পাঠ্য]

ঢাকা কলেজের ভূতপূর্ব্ব গণিতাধ্যাপক, "এল্‌জেবরা মেড্‌ ইজি", "মডার্ণ জিওমেট্রি", "ইণ্টারমিডিয়েট্‌ এল্‌জেবরা", "ইণ্টারমিডিয়েট্‌ সলিড্‌ জিওমেট্রি" প্রভৃতি প্রণেতা

অধ্যাপক কালীপদ বসু, এম্‌. এ.

প্রণীত

কে. পি. বসু লাইব্রেরী

১১ নং মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাতা

নিবেদন

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের নির্দ্দেশানুসারে আগামী ১৯৪১ খৃষ্টাব্দ হইতে প্রবেশিকা পরীক্ষার্থিগণকে বঙ্গভাষায় গণিতশাস্ত্রের পরীক্ষা দিতে হইবে। এই নবপ্রবর্ত্তিত বিধান অনুসারে, আমাদের পিতৃদেব **অধ্যাপক কালীপদ বসু** মহাশয়ের গুণমুগ্ধ ছাত্র-সম্প্রদায়ের আগ্রহাতিশয্যে এবং সুধী শিক্ষকমণ্ডলীর বিশেষ অনুরোধে আমরা তৎপ্রণীত সর্ব্বজনসমাদৃত **'ALGEBRA MADE EASY'** গ্রন্থের বাংলা সংস্করণ প্রকাশ করিলাম। ইহা মূল গ্রন্থের অবিকল বঙ্গানুবাদ। ইহাতে মূল গ্রন্থের সমস্ত অঙ্কগুলি কোনরূপ পরিবর্ত্তন না করিয়া যথাযথভাবে সন্নিবেশিত হইয়াছে। যে সকল বৈশিষ্ট্যের জন্য মূল গ্রন্থখানি শিক্ষক ও শিক্ষার্থিগণের নিকট প্রায় অর্দ্ধশতাব্দী যাবৎ সমাদর পাইয়া আসিতেছে, ইহাতে তৎসমুদয়ই সংরক্ষিত হইয়াছে। ইহার ভাষা সরল; এবং বিষয়বস্তুগুলি ইংরাজী সংস্করণের ন্যায় সহজবোধ্য। নূতন বিধানানুসারে, পরীক্ষা বঙ্গভাষায় হইলেও প্রশ্নপত্র ইংরাজীতেই হইবে; সুতরাং, যাহাতে পরীক্ষার্থিগণের বুঝিবার কোনরূপ অসুবিধা না হয়, তজ্জন্য প্রত্যেক পারিভাষিক শব্দের সঙ্গে সঙ্গে ইংরাজী প্রতিশব্দ দেওয়া হইয়াছে। এই পুস্তকে বিশ্ববিদ্যালয়নির্দ্দিষ্ট পরিভাষা অবলম্বন করা হইয়াছে।

বিশ্ববিদ্যালয়ের নবপ্রবর্ত্তিত বিধান অনুসারে প্রবেশিকা পরীক্ষায় অতিরিক্ত পঠিতব্য বিষয়সমূহের (Additional Course) বিশেষ প্রাধান্য দেওয়া হয় নাই। ১৯৪০ খৃষ্টাব্দের পূর্ব্ব পর্য্যন্ত অতিরিক্ত বিষয়গুলির মধ্যে যে কোন দুইটি বিষয়ে পরীক্ষা দেওয়া বাধ্যতামূলক; কিন্তু তৎপরবর্ত্তী সময়ে তাহা আর বাধ্যতামূলক থাকিবে না। অর্থাৎ ১৯৪০ খৃষ্টাব্দ হইতে অতিরিক্ত বিষয়ে পরীক্ষা দান শিক্ষার্থীর ইচ্ছাধীন।

বীজগণিতের অতিরিক্ত পাঠ্য বিষয়সমূহ একই পুস্তকের অন্তর্গত হইলে, কলেবর বৃদ্ধির জন্য পুস্তকের মূল্যও বৃদ্ধি করিতে হয়; কিন্তু অধিকাংশ শিক্ষার্থীর তাহা কাজে লাগিবে না। এইজন্য অতিরিক্ত বিষয়গুলি স্বতন্ত্র আকারে প্রকাশিত হইয়া আট আনা মূল্য নির্দ্দিষ্ট হইল। দেশের বর্ত্তমান আর্থিক অবস্থার প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া এই গ্রন্থের মূল্যও যথাসম্ভব সুলভ করা হইল।

কলিকাতা
১৫ই সেপ্টেম্বর, ১৯৩৭

শ্রীজিতেন্দ্রকুমার বসু
শ্রীত্রিদিবেশ বসু

সূচীপত্র

বিষয় পৃষ্ঠা

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Problems leading to Simple Equations)

সপ্তম অধ্যায়

বিন্দু সংস্থাপন (Plotting of Points) :

লেখাবলী (Graphs)

অষ্টম অধ্যায়

জটিল যোগ ও বিয়োগ

(Harder Addition and Subtraction)

নবম অধ্যায়

জটিল গুণন (Harder Multiplication).

বিষয় পৃষ্ঠা

দশম অধ্যায়

জটিল ভাগহার (Harder Division)

একাদশ অধ্যায়

সূত্রাবলী ও উহাদের জ্যামিতিক সমাধান

(Formulæ and their Geometrical Representation)

দ্বাদশ অধ্যায়

সহজ উৎপাদক-বিশ্লেষণ (Simple Factorisation)

ত্রয়োদশ অধ্যায়

সহজ অভেদাবলী (Easy Identities)

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

(Highest Common Factor)

পঞ্চদশ অধ্যায়

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

(Lowest Common Multiple)

বিষয় পৃষ্ঠা

ষোড়শ অধ্যায়

সহজ ভগ্নাংশ (Easy Fraction)

সপ্তদশ অধ্যায়

সরল সমীকরণ (Simple Equations)

অষ্টাদশ অধ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations) এবং তৎসম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী (Problems)

ঊনবিংশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রাবলী (Graphs of Simple Equations)

বিংশ অধ্যায়

সহজ দ্বি-শক্তি সমীকরণ ও তদ্বিষয়ক প্রশ্নাবলী (Easy Quadratic Equations and Problems)

বিষয় পৃষ্ঠা

একবিংশ অধ্যায়

জটিল সূত্রাবলী (Harder Formulæ)

দ্বাবিংশ অধ্যায়

জটিল গুণনীয়ক ও অভেদাবলী (Harder Factors and Identities)

ত্রয়োবিংশ অধ্যায়

ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem) ও বিভাজ্যতা (Divisibility)

চতুর্বিংশ অধ্যায়

জটিলতর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. (Harder H. C. F. and L. C. M.)

বিষয় পৃষ্ঠা

অষ্টবিংশ অধ্যায়

লেখাবলী ও উহাদের ব্যবহার

(Graphs and their applications)

ঊনত্রিংশ অধ্যায়

সূচক-নিয়মাবলী (Laws of Indices)

ত্রিংশ অধ্যায়

মূলাকর্ষণ-প্রক্রিয়া (Evolution) ঃ

বর্গ ও ঘনমূল নির্ণয় (Square and Cube roots)

একত্রিংশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

সহজ বীজগণিতে ব্যবহৃত পরিভাষা

abscissa—ভুজ
absolute—পরম
absolute value—পরমমান
abstract quantity—অনবচ্ছিন্ন বা শুদ্ধ রাশি
addition—যোগ, সঙ্কলন
adfected quadratic—মিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বিশক্তি
alternando—একান্তরক্রিয়া
alternative—বিকল্প
ambiguous—দ্ব্যর্থক
arithmetic series—সমান্তর শ্রেণী
ascending order—ঊর্দ্ধক্রম
associative law—সংযোগ-নিয়ম
axiom—স্বতঃসিদ্ধ
axis—অক্ষ
binomial—দ্বিপদ
biquadratic—চতুর্ঘাত
braces—ধনুর্বন্ধনী
brackets—বন্ধনী
cancellation—অপসারণ
circle—বৃত্ত
co-efficient—গুণক, সহগ
column—স্তম্ভ
commutative law—বিনিময়-নিয়ম
complex—দুরূহ
componendo—যোগক্রিয়া
compound—মিশ্র
concrete quantity—অবচ্ছিন্ন বা বদ্ধ রাশি
conditional identities—সাপেক্ষ অভেদাবলী
conjugate surd—বিপরীত করণী
constant (quantity)—ধ্রুবক
continued product—ক্রমিক বা ধারাবাহিক গুণফল
co-ordinates—ভুজ-কোটি
crotchets—গুরুবন্ধনী
cube—ঘন
cube-root—ঘনমূল
cubic—ত্রিঘাত, ঘন
cyclic order—চক্র-ক্রম
deduction—সিদ্ধান্ত
degree (of an expression)—মান
denominator—হর
dependent (variable)—অধীন
descending order—অধঃক্রম
dimension—মাত্রা
distributive law—বিচ্ছেদ-নিয়ম
dividend—ভাজ্য
dividendo—ভাগক্রিয়া
divisibility—বিভাজ্যতা
divisibility theorem—বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা
divisor—ভাজক
elimination—অপনয়ন
equation—সমীকরণ
equation of condition—সাপেক্ষ সমীকরণ
evolution—মূলাকর্ষণ
expansion—বিস্তৃতি
exponent or index—সূচক
expression—রাশি, রাশিমালা
factor—উৎপাদক, গুণক
factorization—গুণকনির্ণয়, উৎপাদকনির্ণয়
formula (statement)—সূত্র
fraction—ভগ্নাংশ
function—অপেক্ষক
geometric series—গুণোত্তর শ্রেণী
graph—লেখ, চিত্র
graphical—লৈখিক
group—বিভাগ, সঙ্ঘ
harmonic series—বিপরীতশ্রেণী
homogeneous—সমমাত্র

প্রশ্নমালা 15

দেখাও যে :

1. $(-a)\times 6b = -6ab.$

2. $(4a)\times(-2b) = -8ab.$

3. $-7x^7 \times 8x^8 = -56x^{15}.$

4. $(-2b)\times(-10a) = 20ab.$

5. $(-7c)\times(-3ab) = 21abc.$

6. $10\times 35 = 25\times 14.$

7. $15\times 75 = 5^3\times 3^2.$

8. $(-a)^3 = -a^3$

9. $(-ab)^3 = -a^3b^3.$

10. $(a^4b^2)^3 = a^{12}b^6.$

11. $(-a^3b^5)^2 = a^6b^{10},$

12. $(-x)^5 = -x^5.$

13. $(-4x^2y^4)^2 = 16x^4y^8.$

গুণ কর :

14. $2x^2y$ কে $-3x^5y^4$ দ্বারা।

15. $-7a^2b^3c$ কে $-3abc^2$ দ্বারা।

16. $-5x^{12}y^3$ কে $-8x^5y^{13}$ দ্বারা।

17. $-12x^3y^3z^2$ কে $13x^7y^6z^4$ দ্বারা।

18. $-14xy^5z^8$ কে $-10x^5y^2z^{12}$ দ্বারা।

সরল কর :

19. $(-x)^3\times(-2xy^2)^2\times(x^2y)^3.$

20. $(-2a^2)\times(7a^4b^7)\times(5a^9b^5).$

21. $(-6x^5y^2z)\times(2z^4x^3y^5)\times(-4y^3z^2x^8).$

22. $(-3x^2y)\times(4zy^2x)\times(-x^3z^5y^4)\times(2zxy).$

46. পূর্ব্ববর্ত্তী নিয়মে প্রদর্শিত পদ্ধতি অনুসারেই সরলরাশিসমূহের গুণফল নির্ণয় করা যায় ; অপেক্ষাকৃত জটিল গুণনের সময় এই প্রকার প্রক্রিয়া সাধারণতঃ মৌখিকই সম্পন্ন করিতে হয়। শিক্ষার্থিগণ যাহাতে এইরূপ গুণনে ভালরূপ অভ্যস্ত হইতে পারে, সেইজন্য নিম্নে একটি প্রশ্নমালা দেওয়া হইল।

উদা. 1. $3x^2$ এবং $-5xy$ এর গুণফল লিখ।

$$(3x^2)\times(-5xy) = -15x^3y.$$

2. $-5a^2b$ এবং $-8ab^2$ এর গুণফল লিখ।

$$(-5a^2b)\times(-8ab^2) = 40a^3b^3.$$

প্রশ্নমালা 16

নিম্নলিখিতের গুণফল লিখ :

1. $-2x^3$ এবং $5x^4$.
2. $5a^3b$ এবং $-4ab^5$.
3. $-3m^2n^5$ এবং $-7n^3m^5$.
4. $3x^3y^5$ এবং $-6xy^2$.
5. $-a^3b^2$ এবং $-3a^4b^8$.
6. $5mn^6$ এবং $-8m^7n$.
7. $-10xyz^2$ এবং $-5xy^2z$.
8. $4x^3y^3z$ এবং $-6xyz^3$.
9. $-6x^2y^3z^4$ এবং $-8x^3y^2z$.
10. $-5a^3b^5c^7$ এবং $-5a^2b^4c^6$.
11. $3x^2yz^4$ এবং $-8xy^2z$.
12. $-4abxy$ এবং $-8a^2xby^2$.
13. $-7a^2b^2z^3$ এবং $-5abz$.
14. $5a^4x^2y$ এবং $-12x^5y^4a^2$.
15. $-14xy^4$ এবং $-5x^4yz$.
16. $2abc^5$ এবং $-9a^7b^5c$.
17. $-7a^3x^5y$ এবং $-9x^3ya^6$.
18. $-8x^6y^2z^5$ এবং $-20y^5z^2x^8$.
19. $-13a^8b^{13}c^{15}$ এবং $-5bc^5a^2$.
20. $-7a^7x^8y^6z^2$ এবং $-16z^5x^2a^6y^3$.

47. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a(b+c)$* $= ab+ac$.

b ও c যে কোন রাশিই হউক না কেন, a একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$a(b+c) = (b+c)+(b+c)+(b+c)+\cdots\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}$$
$$= (b+b+b+\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত})$$
$$+ (c+c+c+\cdots\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত})$$
$$= ab+ac. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

অতএব, বিপরীতভাবে, $\dfrac{ab+ac}{a} = b+c = \dfrac{ab}{a}+\dfrac{ac}{a}$; অর্থাৎ, p ও q যে কোন রাশিই হউক না কেন, r একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$\frac{p+q}{r} = \frac{p}{r}+\frac{q}{r}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (A)$$

এখন মনে কর, a একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ (positive fraction), অর্থাৎ $a = \dfrac{m}{n}$; কিন্তু, m ও n উভয়ই অখণ্ড ধনরাশি।

তাহা হইলে, $\dfrac{m}{n}(b+c) = m \times \dfrac{b+c}{n}$

$$= \frac{m(b+c)}{n} = \frac{mb+mc}{n} = \frac{mb}{n}+\frac{mc}{n} = \frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c. \qquad \cdots \quad (2)$$

* প্রত্যেক দ্বিপদরাশিকেই '$b+c$' রূপে লেখা যাইতে পারে। দৃষ্টান্তস্বরূপ $2x^2$ কে b এবং $(-3y^2)$ কে c ধরিলে, $2x^2-3y^2$ কে অর্থাৎ $(2x^2)+(-3y^2)$ কে অবশ্যই $b+c$ বলিয়া কল্পনা করা যায়।

অতএব, (1) ও (2) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন ধনরাশি হইলে,

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

তারপর মনে কর, a একটি ঋণরাশি এবং $-x$ এর সমান ; এক্ষেত্রে x অবশ্যই একটি ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$\begin{aligned}(-x).(b+c) &= -[x(b+c)]\\ &= -(xb+xc)\\ &= -xb-xc\\ &= (-x).b+(-x).c\ ;\end{aligned}$$

অতএব দেখা যায় যে, a যে কোন একটি ঋণরাশি হইলে,

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

সুতরাং (3) ও (4) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন রাশিই হউক না কেন,

$$\boldsymbol{a(b+c)=ab+ac.}$$

অনুসি. 1. বিপরীতক্রমে, $ab+ac=a(b+c)$;
তদ্রূপ, $xya^2+xyb^2=xy(a^2+b^2)$.

অনুসি. 2. যেহেতু, $b-c=b+(-c)$,

অতএব, $$\begin{aligned}a(b-c) &= a[b+(-c)]\\ &= ab+a(-c)=ab-ac.\end{aligned}$$

বিপরীতক্রমে, $ab-ac=a(b-c)$.

তদ্রূপ, $2ax-2ay=2a(x-y)$.

অনুসি. 3. $a(b+c+d)=a\{b+(c+d)\}=ab+a(c+d)=ab+ac+ad.$

তদ্রূপ, $a(b+c+d+e+f+\cdots)=ab+ac+ad+ae+af+\cdots$

অতএব, কোন বহুপদরাশি (multinomial) কে একটি সরলরাশি (monomial) দ্বারা গুণ করিতে হইলে বহুপদরাশিটির প্রত্যেক পদকে সরলরাশিটি দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে যোগ করিতে হয়।

বিপরীতক্রমে, $ab+ac+ad+ae+\cdots=a(b+c+d+e+\cdots)$.

উদা. 1. $2ab-3b^2$ কে $5ab$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}5ab(2ab-3b^2) &= 5ab\{2ab+(-3b^2)\}\\ &= 5ab\times 2ab+5ab\times(-3b^2)\\ &= 10a^2b^2-15ab^3.\end{aligned}$$

উদা. 2. $x^4-3x^3+5x^2-6x+4$ কে $-6x^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}(-6x^2)(x^4-3x^3+5x^2-6x+4)\\ &=(-6x^2)\{x^4+(-3x^3)+5x^2+(-6x)+4\}\\ &=(-6x^2).x^4+(-6x^2)(-3x^3)+(-6x^2).5x^2\\ &\qquad+(-6x^2)(-6x)+(-6x^2).4\\ &=-6x^6+18x^5-30x^4+36x^3-24x^2.\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে, উপরিপ্রদর্শিত পদ্ধতিতেই প্রত্যেক প্রশ্নের সমাধান করা উচিত; কিছু অভ্যস্ত হইলে নিম্নলিখিত উদাহরণানুযায়ী একসঙ্গেই ফল লিখিয়া দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 3. $-4a^4+5a^3b-6a^2b^2-8ab^3+9b^4$ কে $-3a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l}-4a^4+5a^3b-6a^2b^2-8ab^3+9b^4\\ -3a^2b^2\\ \hline 12a^6b^2-15a^5b^3+18a^4b^4+24a^3b^5-27a^2b^6\end{array}$$

উদা. 4. সরল কর: $2x^2(3x-2)+2x(2x+3)-6(x-3)$.

এখন, $2x^2(3x-2)=6x^3-4x^2$,

$2x(2x+3)=4x^2+6x$,

$6(x-3)=6x-18$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি

$$\begin{aligned}&=(6x^3-4x^2)+(4x^2+6x)-(6x-18)\\ &=6x^3-4x^2+4x^2+6x-6x+18=6x^3+18.\end{aligned}$$

উদা. 5. সরল কর: $3a(2a-5)-3a(a-6)$.

$2a-5$ এর পরিবর্তে x এবং $a-6$ এর পরিবর্তে y লিখিলে,

$$\begin{aligned}3a(2a-5)-3a(a-6)&=3ax-3ay=3a(x-y)\\ &=3a\{(2a-5)-(a-6)\}\\ &=3a(a+1)=3a^2+3a.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 17

গুণ কর:

1. $2x-y$ কে $-x$ দ্বারা।
2. $a-2b+3c$ কে $-5a$ দ্বারা।
3. $2x-3y$ কে $4xy$ দ্বারা।
4. $2a^2-3b^2-c^2$ কে abc দ্বারা।

5. $x^2y-2xy^2-y^3$ কে $-3xy$ দ্বারা।

6. $3a^2b^2-ab^2-5a^3+a^2b$ কে $7b^2$ দ্বারা।

7. $3a^2x-4ax^2+5ax$ কে $-2a^2$ দ্বারা।

8. $-2m^3+3m^2n-5mn^2$ কে $4mn$ দ্বারা।

9. $a^2bc-b^2ca+c^2ab$ কে $-abc$ দ্বারা।

10. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ কে xyz দ্বারা।

11. $-2c^2d+3d^3c-5cd^2-4c^2d^2$ কে $-6c^3d^4$ দ্বারা।

12. $8a^4-6a^3b+5a^2b^2-4ab^3$ কে $-2a^3b^3$ দ্বারা।

সরল কর :

13. $7x^3(x-2)-2x^2(x-3)-8x^2(1-2x)$.

14. $x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)$.

15. $9x^3(x^3-2y^2)+5y^2(3x^3+y^2)+3y^2(x^3-10y^2)$.

16. $x^3(x^3+2x^2+2x)-2x^2(x^3+2x^2+2x)+2x(x^3+2x^2+2x)$.

17. $a^6b^3(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)+2a^4b^2(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)$
$+2a^2b(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)$.

18. $2a^9b^6(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)-6a^6b^4(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)$
$+9a^3b^2(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)$.

19. $a^2(2x-3y)+a^2(3x+4y)-a^2(5x-2y)$.

20. যদি $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$ এবং $c=z^2-xy$ হয়, তবে

(i) $ax+by+cz$; (ii) $cx+ay+bz$ এর মান নির্ণয় কর।

4. ভাগ (Division)

48. সংজ্ঞা : যে কোন তিনটি রাশি a, b এবং c যদি এইরূপভাবে পরস্পর সম্বদ্ধ হয় যে, $a=b\times c$, তাহা হইলে, 'a রাশিটি b রাশিটি দ্বারা বিভাজ্য (divisible)' এইরূপ বলা হয় ; অথবা সংক্ষেপে, $a=b\times c$ হইলে, $a\div b=c$, বলা হয়।

এইরূপ, $x=y\times z$ হইলে, $x\div y=z$, এবং $x\div z=y$.

যে রাশিটিকে ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজ্য** (dividend), যে রাশিটি দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজক** (divisor) এবং ভাগ করার ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে **ভাগফল** (quotient) বলে।

টীকা। a কে b দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহাকে সাধারণতঃ $\frac{a}{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

49. মূল প্রতিজ্ঞা (Fundamental propositions) :

(1) **প্রমাণ করিতে হইবে যে,** $a \div b \times b = a.$

যদি '$a \div b$' x দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে,

$$x \times b = a.$$

অতএব, $a \div b \times b = x \times b = a.$

(2) **প্রমাণ করিতে হইবে যে,** $a \div b \div c = a \div bc.$

$$(a \div b \div c) \times bc = \{(a \div b) \div c\} \times c \times b$$
$$= [\{(a \div b) \div c\} \times c] \times b$$
$$= (a \div b) \times b = a.$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a \div b \div c = a \div bc$;

অর্থাৎ, কোন একটি রাশিকে অন্য দুইটি রাশিদ্বারা পর পর ভাগ করা, এবং পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করা একই কথা।

অনুসি.। স্পষ্টই $a \div b \div c = a \div c \div b$; কারণ, প্রত্যেকেই $a \div bc$ এর সমান।

(3) **প্রমাণ করিতে হইবে যে,** $a \div b = a \times \frac{1}{b}.$

এখন, $\frac{1}{b} \times b = 1 \div b \times b = 1$;

অতএব, $a \times \frac{1}{b} \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times 1 = a$;

অর্থাৎ, $\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a.$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $a \div b = a \times \frac{1}{b}.$

কাজেই, কোন একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করা, অথবা পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) দ্বারা গুণ করা, উভয়ই এক।

[দুইটি রাশির গুণফল 1 হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) বলে।]

অনুসি.। $a \div b \times c = a \times c \div b$;

কারণ, $a \div b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b} = a \times c \div b.$

50. ভাগে চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম :

যেহেতু $a \times (-b) = -ab,$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $(-ab) \div a = -b$
এবং $(-ab) \div (-b) = a$ ... ... (I)

আবার, যেহেতু $(-a) \times (-b) = ab,$
সুতরাং, $ab \div (-a) = -b$
এবং $ab \div (-b) = -a$ ... ... (II)

আবার, ইহাও সুস্পষ্ট যে, $ab \div a = b$
এবং $ab \div b = a$ ... ... (III)

অতএব (I), (II) ও (III) হইতে ভাগের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় ; যথা, ভাজ্য ও ভাজকের সদৃশচিহ্ন হইলে, ভাগফলে ধনচিহ্ন, এবং অসদৃশচিহ্ন হইলে, ভাগফলে ঋণচিহ্ন হইবে ; অর্থাৎ সদৃশচিহ্ন ধনাত্মক এবং অসদৃশচিহ্ন ঋণাত্মক ভাগফল উৎপন্ন করে।

51. একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ :

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে :

(1) যেহেতু $3a^2b \times 5a^3b^2c = 15a^5b^3c,$
অতএব, $(15a^5b^3c) \div (5a^3b^2c) = 3a^2b.$

কাজেই, ভাজ্য $= 15a^5b^3c$
$= 3 \times 5 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b \times c,$
এবং ভাজক $= 5a^3b^2c$ হইলে, ভাগফল $= 3a^2b.$ ... (I)

(2) যেহেতু $(-2a^{10}b^2cd) \times (-3a^5c^2) = 6a^{15}b^2c^3d,$
অতএব, $(6a^{15}b^2c^3d) \div (-2a^{10}b^2cd) = -3a^5c^2.$
কাজেই, ভাজ্য $= 6a^{15}b^2c^3d.$
$= 2 \times 3 \times a^{10} \times a^5 \times b^2 \times c \times c^2 \times d,$
এবং ভাজক $= -2a^{10}b^2cd$ হইলে, ভাগফল $= -3a^5c^2$ ... (II)

(3) যেহেতু $(-5a^8b^5c^2d) \times (4b^3c^4) = -20a^8b^8c^6d,$
অতএব, $(-20a^8b^8c^6d) \div (-5a^8b^5c^2d) = 4b^3c^4.$

কাজেই, ভাজ্য $= -20a^8b^8c^6d$
$= (-5) \times 4 \times a^8 \times b^5 \times b^3 \times c^2 \times c^4 \times d,$ ... (III)
এবং ভাজক $= -5a^8b^5c^2d$ হইলে, ভাগফল $= 4b^3c^4$.

(I), (II) এবং (III) হইতে, একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিবার, নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় :

যে সকল উৎপাদক দ্বারা ভাজক উৎপন্ন হইয়াছে, ভাজ্য হইতে সেই সকল উৎপাদক অপসারণ করিয়া উহার অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির সহিত, ভাজ্য ও ভাজকের সদৃশচিহ্ন হইলে, ধনচিহ্ন এবং অসদৃশচিহ্ন হইলে, ঋণচিহ্ন যুক্ত করিলেই ভাগফল পাওয়া যায়।

। এখন $a^{12} \div a^7 = (a^5 \times a^7) \div a^7 = a^5 [= a^{12-7}]$.
তদ্রূপ, $a^{20} \div a^9 = a^{11}$; $a^{21} \div a^{14} = a^7$; ইত্যাদি।

অতএব, সাধারণভাবে, m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি এবং $m > n$ হইলে,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

উদা. 1. $18m^3n^2p$ কে $-6m^2n^2p$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য $= 18m^3n^2p$
$= 6 \times 3 \times m^2 \times m \times n^2 \times p.$
ভাজক $= -6m^2n^2p.$
$\therefore$ ভাগফল $= -3m.$

উদা. 2. $-24a^7b^3c$ কে $-6a^4bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য $= -24a^7b^3c$
$= (-6) \times 4 \times a^4 \times a^3 \times b \times b^2 \times c.$
ভাজক $= -6a^4bc.$
$\therefore$ ভাগফল $= 4a^3b^2.$

প্রশ্নমালা 18

ভাগ কর :

1. $16x^4$ কে $-4x$ দ্বারা।
2. $-18x^6$ কে $6x^2$ দ্বারা।
3. $-20a^7x^5$ কে $-5a^3x^2$ দ্বারা।
4. $36x^{10}y^9$ কে $12x^5y^4$ দ্বারা।
5. $-14a^4b^3c$ কে $-7a^2bc$ দ্বারা।
6. $-40p^{12}q^8r^2$ কে $10p^{10}q^6r^2$ দ্বারা।

7. $-70x^{16}y^9z$ কে $-14x^{10}y^5$ দ্বারা।
8. $64a^{12}b^7c^5$ কে $-8a^9b^7c^3$ দ্বারা।
9. $-81m^{13}n^{14}p^5$ কে $27m^8n^8p^4$ দ্বারা।
10. $-69a^7b^4c^9$ কে $-23a^5b^4c^7$ দ্বারা।
11. $25x^{20}y^3z^8$ কে $-5x^{16}yz^8$ দ্বারা।
12. $-42a^{23}x^{23}y^9z^3$ কে $-14a^{17}x^{18}y^5z$ দ্বারা।
13. a^{101} কে a^{57} দ্বারা। 14. $28x^{205}$ কে $-4x^{157}$ দ্বারা।
15. $56m^{307}$ কে $-8m^{289}$ দ্বারা।
16. $-91a^{138}b^{209}$ কে $13a^{97}b^{89}$ দ্বারা।

52. একটি বহুপদরাশিকে একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ:

47 নিয়মের তৃতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায় যে,

$$a(b+c+d+e+f+\cdots\cdots)=ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

অতএব, $(ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots)\div a$

$$=b+c+d+e+f+\cdots\cdots$$

$$=(ab\div a)+(ac\div a)+(ad\div a)+(ae\div a)+(af\div a)+\cdots$$

সুতরাং, একটি বহুপদরাশিকে একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাজ্যের প্রত্যেকটি পদকে ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফলগুলির সমষ্টি লইলেই নির্ণেয় পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4$ কে $-2ax$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল}=\frac{4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4}{-2ax}$$

$$=\frac{4a^3x^2}{-2ax}+\frac{-6a^2x^3}{-2ax}+\frac{10ax^4}{-2ax}$$

$$=-2a^2x+3ax^2-5x^3.$$

উদা. 2. $9x^5-4x^4a-2x^3a^2$ কে $3x^3$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল}=\frac{9x^5-4x^4a-2x^3a^2}{3x^3}$$

$$=\frac{9x^5}{3x^3}+\frac{-4x^4a}{3x^3}+\frac{-2x^3a^2}{3x^3}$$

$$=3x^2-\tfrac{4}{3}xa-\tfrac{2}{3}a^2.$$

টীকা। কিছু অভ্যস্ত হইলে মধ্যবর্তী প্রক্রিয়াগুলি না দেখাইয়া একেবারেই ভাগফল লিখিয়া দেওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 19

ভাগ কর :

1. $3a^3b^2 - 2a^2b^3$ কে a^2b^2 দ্বারা।
2. $2a^3b - 3ab^3$ কে $-ab$ দ্বারা।
3. $6a^4b^2 - 9a^2b^4$ কে $3a^2b^2$ দ্বারা।
4. $12x^4y^2 - 9x^5y$ কে $-3x^3y$ দ্বারা।
5. $14x^7y^5 - 21x^5y^7$ কে $-7x^5y^5$ দ্বারা।
6. $4mn^3 - 12m^2n^2 + 16m^3n$ কে $4mn$ দ্বারা।
7. $-3a^3x^4 + 6a^2x^5 - 9a^4x^3$ কে $-3a^2x^3$ দ্বারা।
8. $12x^5 - 8x^3a^2 + 20ax^4$ কে $-4x^3$ দ্বারা।
9. $10m^5n^4 - 15m^7n^2 - 20m^3n^6$ কে $5m^3n^2$ দ্বারা।
10. $8p^4q^2 - 5p^3q^3 - 3p^2q^4$ কে $-8p^2q^2$ দ্বারা।
11. $-14x^8y^5 + 21x^{10}y^3 - 28x^7y^8$ কে $7x^7y^3$ দ্বারা।
12. $15a^4x^8 - 30a^7x^5 - 45a^6x^6$ কে $20a^4x^5$ দ্বারা।
13. $-60x^4a^5 - 75x^3a^6 + 80x^5a^4$ কে $-20x^3a^4$ দ্বারা।
14. $125m^6n^4p^2 - 175m^4n^6p^2 - 200m^2n^2p^8$ কে $25m^2n^2p^2$ দ্বারা।
15. $-a^2b^4c^4x^4y^4z^2 + 2a^4b^2c^4x^2y^4z^4 - 3a^4b^4c^2x^4y^2z^4$ কে $-a^2b^2c^2x^2y^2z^2$ দ্বারা।

বিবিধ প্রশ্নমালা I

I

1. কোন্ সংখ্যা 5 ঘণ্টা সময় বুঝাইবে, (i) যদি সময়ের একক অর্দ্ধঘণ্টা হয়; (ii) যদি সময়ের একক দশ ঘণ্টা হয়?

2. $x = 17$ এবং $y = 25$ হইলে, $x \sim y$ কত বুঝাইবে?

3. 'সহগ' এর সংজ্ঞা লিখ। সাংখ্যিক এবং আক্ষরিক 'সহগ' এর পার্থক্য দেখাও। $15x^3$, $2qx^3$, $7ab^2x^3$ এবং $16m^2pqx^3$ এর মধ্যে কোন্ কোন্‌টি x^3 এর 'সহগ'?

4. (i) $\sqrt{ab}$ এবং $\sqrt{a}b$ এর পার্থক্য কি ?

(ii) $a=9$, $b=4$ হইলে, $\sqrt{ab} \sim \sqrt{a}b$ এর মান নির্ণয় কর।

5. যদি কোন স্থানের উত্তরে অর্দ্ধ মাইল দূরত্ব 40 দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে ঐ স্থানের দক্ষিণে 11 গজ দূরত্ব কত দ্বারা প্রকাশ করিবে ?

6. একটি ঋণরাশিকে একটি ধনরাশির সহিত যোগ করিলে কি ফল হয় লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, $+(-b)=-b$.

7. 'বিয়োগ' এর সংজ্ঞা লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,

$$4-6=-2 \text{ এবং } 5-(-3)=8.$$

8. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে উহাদের মানের অধঃক্রমানুসারে (in descending order) লিখ: 2, 5, −3, 7, −8, −1, 9, −4, −12.

II

1. $a=4$, $b=5$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $ab-a\times b$; (ii) $45-ab$; (iii) $74-7a$; (iv) $85-8b$.

2. a^n দ্বারা কি বুঝায় ? a^n এবং n^a এর প্রভেদ কি ?

$a=7$, $b=5$ হইলে, $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ এর মান কত ?

3. (i) a' এর সহিত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সম্বন্ধ কি ?

$$\sqrt[3]{a},\ \sqrt[5]{a},\ \sqrt[8]{a} \text{ এবং } \sqrt[n]{a}.$$

(ii) $a=8$, $b=7$, $c=6$, $d=5$ এবং $e=1$ হইলে,

$$\sqrt{a^2-3d}\times\sqrt[3]{b^3-c^3-2e} \text{ এর মান কত ?}$$

4. একটি ধনরাশি বা ঋণরাশির পরমমানের অর্থ কি ? একটি দৃষ্টান্তদ্বারা ইহা বুঝাইয়া দাও।

5. যোগ কর: $3x^2y$, $-8x^2y$, $-19x^2y$ এবং $17x^2y$;

$x=4$ এবং $y=5$ হইলে, উক্ত যোগফলের সাংখ্যমান কত ?

6. $16x^4$, $-8xy^3$, $24x^2y^2$, y^4 এবং $-32x^3y$ এর যোগফল লিখ; $x=4$, $y=5$ হইলে, উক্ত যোগফলের সাংখ্যমান কত ?

7. $17b-12c-19a$ হইতে $4a-13b-25c$ বিয়োগ কর।

8. সরল কর: $3x-[4y+\{2z-(x-5y+3z)\}]-(3x-7)$

III

1. নিম্নলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর :

(1) a ও b এর সমষ্টিকে c দ্বারা গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহা, x কে y ও z এর গুণফল দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহার সমান।

(2) x ও y এর সমষ্টির বর্গ, x ও y এর বর্গদ্বয় এবং x ও y এর গুণফলের দ্বিগুণ,—এতদুভয়ের সমষ্টির সমান।

(3) m হইতে n এর বিয়োগফলের ঘনমূলকে m ও n এর গুণফলের ঘন দ্বারা ভাগ করা হইলে, ঐ ভাগফল x ও y এর বর্গমূলদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ন্যূন।

(4) যেহেতু b হইতে a বড়, অতএব b এর তিনগুণ হইতে a এর তিনগুণ বড়।

2. A, B, C, D, E, F, G বিন্দুগুলি একটি সরলরেখার উপর এরূপভাবে অবস্থিত যে, AB, BC, CD, DE, EF, FG দূরত্বগুলি যথাক্রমে 3, 4, 6, 8, 5 এবং 7 ইঞ্চি। DC কে 3 দ্বারা সূচিত করিলে, DB, DE, DF, DA, DG এর প্রত্যেকে কত দ্বারা সূচিত হইবে ?

3. এক ঋণরাশিকে অন্য এক ঋণরাশির সহিত যোগ করিলে, যোগফল কি হইবে বল। $a=6$ এবং $b=4$ হইলে, $-a^3$, $-3a^2b$, $-3ab^2$, $-b^3$ এর সমষ্টির মান নির্ণয় কর।

4. কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, উহাদের যোগফল অঙ্কগুলির ক্রম-পরিবর্ত্তনের উপর নির্ভর করে না (অর্থাৎ ক্রমপরিবর্ত্তন দ্বারা যোগফলের কোন পরিবর্ত্তন হয় না)।

5. $a=16, b=10, c=5, d=1$ হইলে, $(a-b)(5\sqrt{a}-b)+\sqrt{(a-b)(c+d)}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$$

7. যোগ কর : $3a^2+4bc-x^2+10$, $2x^2-5a^2-15+6bc$ এবং $21-9bc-4a^2-10x^2$.

8. সরল কর : $a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)\}]$.

IV

1. $a=9$ হইলে,

(1) $\sqrt{49}-\sqrt{4a}$ এবং (2) $\sqrt{49-\sqrt{4a}}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, রাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (groupএ) ভাগ করিয়া নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগগুলির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

3. $a=2$, $b=3$ এবং $c=4$

$$\frac{a-b+c}{a+b-c}+\frac{b-c+a}{b+c-a}+\frac{c-a+b}{c+a-b}$$ এর মান নির্ণয় কর।

4. 'বীজগণিতীয় রাশিমালা'র সংজ্ঞা লিখ। সরলরাশি ও মিশ্ররাশির মধ্যে পার্থক্য কি ?

$42abx^2$ একটি মিশ্র, না সরল রাশি ? দৃষ্টান্ত সহ বিভিন্নরূপ মিশ্ররাশিমালার নাম বল।

5. $x=2$, $y=3$, $a=6$, $b=5$ হইলে,

$$\sqrt[3]{b(x+y)^2}+\sqrt[3]{(x+a)(b-2x)}+\sqrt[3]{x(b-y)^2}$$ এর মান নির্ণয় কর।

6. কিয়ৎপরিমাণ অর্থ A, B ও C এর ভিতর এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, B, A হইতে a পাউণ্ড বেশী এবং C, B হইতে b পাউণ্ড বেশী পাইল ; A x পাউণ্ড পাইয়া থাকিলে, সম্পূর্ণ অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

7. যোগ কর।

$a^2-3ab-\frac{14}{21}b^2$, $2b^2-\frac{2}{3}b^3+c^2$, $ab-\frac{1}{3}b^2+b^3$ এবং $2ab-\frac{1}{3}b^3$.

8. সরল কর :

$$\{2x^2-(y^2-xy)\}-\{y^2-(4x^2-y^2)\}+\{2y^2-(3xy-x^2)\}.$$

V

1. গুণফলের 'মাত্রা' এবং 'মান' কাহাকে বলে ? 'সমমাত্র রাশিমালা' কাহাকে বলে ? একটি ষষ্ঠমানবিশিষ্ট ও একটি সপ্তমমানবিশিষ্ট ত্রিপদ (trinomial) সমমাত্র রাশিমালা লিখ।

2. $a\times b-c\div d\times e+f+gh$ এর মান নির্ণয় করিতে হইলে, কিরূপে আরম্ভ করিতে হয় ?

3. উৎপাদক (factor)এর সংজ্ঞা লিখ। $2ab(a+b)$ এর সরল উৎপাদকগুলি কি কি ?

4. $a=4$ এবং $x=2$ হইলে,

$$\frac{2ax^2}{(a-x)^2}-\frac{6\sqrt[3]{ax}}{a^3\sqrt{2a+4x}}-\frac{29x^2}{64a}$$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $x=5$ হইলে, $(x^3-7x^2+6x+5)+(-3x+2x^3+4+5x^2)+(-11-4x^3+2x-7x^2)+(9x^2+2+5x^2-4x)$ এর মান নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $a-(b-c)=a-b+c$. a, b হইতে বড় এবং b, c হইতে বড় হইলে, এবং প্রত্যেকে ধনরাশি হইলে, উপরোক্ত সূত্র কিরূপে সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় ?

7. সরল কর : $2x-[(3x-9y)-\{(2x-3y)-(x+5y)\}]$.

8. কখন্ একটি সংখ্যাকে আর একটি সংখ্যাদ্বারা গুণ করা হইল, বলা হয় ? সংজ্ঞানুসারে, -8 ও -4 এর গুণফল নির্ণয় কর।

VI

1. সংখ্যার 'শক্তি' ও উহার 'সূচক' এর সংজ্ঞা লিখ ; এবং একটি দৃষ্টান্ত দ্বারা উহাদিগকে বুঝাইয়া দাও।

2. $a=16$, $b=10$, $x=5$, $y=1$ হইলে,
$(a-y)\sqrt{24bx+x^2}+\sqrt{(a-x)(b+y)}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$

(1) যখন $a=3,\ b=4,\ c=5$;

(2) যখন $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=\frac{7}{2}$.

4. যে নিয়মের সাহায্যে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, সেই নিয়মটি লিখ : $a-b+c-d+e-f=(a+c+e)+(-b-d-f)$.

5. $40-(-15)=55$, এইটিকে দৃষ্টান্ত দ্বারা প্রতিপন্ন কর।

6. $x=17$, $y=16$, $z=15$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের সমষ্টির মান নির্ণয় কর : $7x^3-25\sqrt{yz}+z^4$, $19\sqrt{yz}-3z^4-12x^3$ এবং $2z^4+5x^3+7\sqrt{yz}$.

7. নিম্নলিখিত রাশিটিতে উল্লিখিত প্রক্রিয়াগুলি বর্ণনা কর :

$$5a-[4b-\{3c-(2d-7e)\}].$$

8. $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$ হইলে,
$[(a^3+b^3+c^3+d^3)\{a+b-(c-a)\}+a^2b+c^2d]\times\{a^2-(b^2+c^2)+d^2\}$ এর মান নির্ণয় কর।

VII

1. নিম্নলিখিত রাশি দুইটির মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ কর :

(1) $a+bc$ এবং $a+b\times c$; (2) a^4 এবং $4a$; (3) $3\sqrt{a}$ এবং $\sqrt[3]{a}$;

(4) $\sqrt{a+b}$ এবং $\sqrt{a}+b$; (5) $\sqrt{ab}$ এবং $\sqrt{a}\,b$.

2. $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=0$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(1) $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}{(a+b)(c+d)-\{(a-d)+(c-b)\}}$,

(2) $\sqrt[3]{b-a^3}+\sqrt[3]{4(c-a)}-\sqrt[4]{3(8a+5b+3c-2d)}$.

3. দেখাও যে, $(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3$, $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc$ এবং $2a^3+3b^2(a+c)+2b^3+3c^2(a+b)+2c^3+3a^2(b+c)+6abc$ পরস্পর সমান,

(1) যখন $a=2,\ b=3,\ c=4$; (2) যখন $a=7,\ b=4,\ c=1$.

4. সরল কর :

(1) $1-[1-\{1-(-\overline{1+x})\}]$;

(2) $3a-(b-2c)-\{a+c-(3a-b-2c)\}-(2a-3b+4c)$.

5. নিম্নলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর :

(1) দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ও উহাদের অন্তরের গুণফল, সংখ্যা দুইটির বর্গদ্বয়ের অন্তরফলের সমান।

(2) দুইটি সংখ্যার সমষ্টির বর্গ, সংখ্যা দুইটির বর্গদ্বয়ের সমষ্টি হইতে উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ পরিমিত বড়।

6. $a=39,\ b=52$ হইলে, $17a-5b-[7a-3b-\{4(a-b)-(2a+3b)\}]$এর মান নির্ণয় কর।

7. যদি $V=5a+4b-6c$, $X=-3a-9b+7c$, $Y=20a+7b-5c$, এবং $Z=13a-5b+9c$ হয়, তাহা হইলে,

$V-(X+Y)+Z$ এর মান কত ? [মাদ্রাজ প্রবেশিকা, 1883.]

8. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d$, $-\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+d$, $\frac{1}{4}d-\frac{1}{5}b+c-a$, $\frac{1}{6}a-\frac{3}{5}d+b-\frac{5}{6}c$ এবং $8a-6b+3c-4d$ এর সমষ্টি হইতে $\frac{13}{2}a-\frac{151}{30}b+\frac{9}{2}c-\frac{13}{4}d$ বিয়োগ কর।

VIII

1. a ও b দুইটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, প্রমাণ কর যে, $a\times b=b\times a$.

2. $M=a(m+n)$ এবং $N=b(m-n)$ হইলে,

$\dfrac{M}{a}+\dfrac{N}{b}$ এবং $\dfrac{M}{a}-\dfrac{N}{b}$ এর প্রত্যেকের মান নির্ণয় কর।

3. $c(a+b)=ca+cb$ এই অভেদ-(identity)টিতে,

(1) c এর পরিবর্তে $m+n$ বসাও, এবং ইহা হইতে $(m+n)(a+b)$ এর মান নির্ণয় কর।

(2) c এর পরিবর্তে $a+b$ বসাও এবং ইহা হইতে $(a+b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

4. সরল কর: (1) $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)$;

(2) $\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}+\frac{x-y}{xy}$.

5. প্রমাণ কর যে,

(1) m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি, এবং $m>n$, হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$;

এবং (2) $a \div b \div c = a \div c \div b = a \div bc$.

6. $a=3xy-yz-zx$, $b=3yz-zx-xy$ এবং $c=3zx-xy-yz$ হইলে, $\frac{a+b+c}{xyz}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $\frac{3}{2}a^5b^{10}c^{15}x^8y^6z^4+\frac{15}{4}a^{10}b^{15}c^5x^6y^4z^2+\frac{5}{12}a^{15}b^5c^{10}x^4y^2$ কে $24a^3b^5c^7x^2y^4z^6$ দ্বারা গুণ কর।

8. $\frac{3}{2}a^{10}b^{15}c^{20}x^{12}y^{10}z^8+\frac{15}{4}a^{15}b^{20}c^{10}x^{10}y^8z^{12}$ $+\frac{9}{4}a^{20}b^{10}c^{15}x^8y^{12}z^{10}$ কে $\frac{3}{4}a^{10}b^{10}c^{10}x^8y^8z^8$ দ্বারা ভাগ কর।

চতুর্থ অধ্যায়

সরল সূত্রাবলী ও তাহাদের প্রয়োগ

(Simple Formulæ and their applications)

53. সংজ্ঞা: বীজগণিতীয় প্রতীকের (algebraical symbols) সাহায্যে সাধারণভাবে প্রকাশিত কোন সিদ্ধান্তকে **বীজগণিতীয় সূত্র** (algebraical formula) বা সংক্ষেপে, শুধু **সূত্র** (formula) বলা হয়। সূত্রের সাহায্যে সংখ্যা সম্বন্ধীয় যে সিদ্ধান্ত অত্যন্ত সাধারণভাবে প্রকাশ করা যায়।

54. সূত্র : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

$$[\,(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+2ab+b^2.\,]$$

সুতরাং, দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ, রাশি দুইটির বর্গদ্বয়ের, এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের, সমষ্টির সমান।

অনুসি.। $a^2+b^2 = (a^2+2ab+b^2)-2ab = (a+b)^2-2ab.$

উদা. 1. $2x+3y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2 = 4x^2+12xy+9y^2.$$

উদা. 2. $5x+4$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(5x+4)^2 = (5x)^2+2(5x)(4)+4^2 = 25x^2+40x+16.$$

উদা. 3. $4a^3+7b^4$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(4a^3+7b^4)^2 = (4a^3)^2+2(4a^3)(7b^4)+(7b^4)^2 = 16a^6+56a^3b^4+49b^8.$$

উদা. 4. $a+b+c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$(a+b+c)^2 = \{a+(b+c)\}^2$ [$b+c$ কে একটি পদ ধরিয়া]

$$= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

উদা. 5. $a+b+c+d$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$(a+b+c+d)^2 = \{(a+b)+(c+d)\}^2$ [$a+b$ কে একটি এবং $c+d$ কে আর একটি পদ ধরিয়া]

$$= (a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$
$$= (a^2+2ab+b^2)+2(ac+ad+bc+bd)+(c^2+2cd+d^2)$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

6. সরল কর :

$$(a+b-c)^2+2(a+b-c)(a-b+c)+(a-b+c)^2$$

$a+b-c$ এর পরিবর্তে x এবং $a-b+c$ এর পরিবর্তে y ধরিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+2xy+y^2$

$=(x+y)^2$

$=\{(a+b-c)+(a-b+c)\}^2$

$=(2a)^2=4a^2.$

7. $x=15$, $y=-9$ হইলে, $9x^2+30xy+25y^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2$

$=(3x+5y)^2$,

কিন্তু $3x+5y=3\times15+5\times(-9)=45-45=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=0.$

প্রশ্নমালা 20

লিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. $x+4$. 2. $3a+2$. 3. $x+2y$. 4. $2x+7y$.
5. $3a+4b$. 6. $5a+7b$. 7. $ay+3bx$. 8. a^2+2bc.
9. $3x^2+2y^2$. 10. $4x^2+y^3$. 11. $a+2b+3c$.
12. $ab+bc+ca$. 13. $2p+3q+4r$. 14. $x^2+y^2+z^2$.
15. $2x+3y+4z$. 16. $x^2+y^3+z^4$. 17. $x+y+2a+3b$.
18. $3a+4b+c+2d$. 19. $2a+x+4y+3z$. 20. $4m+3n+3p+2q$.

সরল কর :

21. $(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.
22. $(x-y+z)^2+(y+z-x)^2+2(x-y+z)(y+z-x)$.
23. $(2a-3b+4c)^2+(2a+3b-4c)^2+2(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$.
24. $(5a-7b)^2+2(5a-7b)(9b-4a)+(9b-4a)^2$.
25. $(2x-5y-3z)^2+(6y+3z-x)^2+2(2x-5y-3z)(6y+3z-x)$.

মান নির্ণয় কর :

26. $9x^2+12x+4$, যখন $x=-1$.
27. $16x^2+64x+64$, যখন $x=-2$.

28. $25m^2 + 40mn + 16n^2$, যখন $m = -18$ এবং $n = 23$.
29. $49a^2 + 56ab + 16b^2$, যখন $a = -7$ এবং $b = 13$.
30. $64a^2 + 16ac + c^2$, যখন $a = 6$ এবং $c = -49$.
31. $81x^2 + 18xz + z^2$, যখন $x = 7$ এবং $z = -67$.
32. $36p^2 + 132pq + 121q^2$, যখন $p = 12$ এবং $q = -7$.
33. $m + \frac{1}{m} = 4$ হইলে, দেখাও যে, $m^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = 14$.

55. সূত্র : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$[\,(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.]$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির অন্তরফলের বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টি হইতে রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ বিয়োগ করিতে হয়।

টীকা। এই সূত্রটি প্রকৃতপক্ষে পূর্ব্ব সূত্রেরই অন্তর্ভুক্ত ; কারণ,
$$(a-b)^2 = \{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

অনুসি. 1. $a^2 + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 2ab = (a-b)^2 + 2ab.$

অনুসি. 2. যেহেতু, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ......(1)
এবং $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ......(2)
অতএব, $\boldsymbol{(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab}$;
এবং $\boldsymbol{(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab}$.

আবার, (1) এর সহিত (2) যোগ করিয়া,
$$\boldsymbol{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}\ ;$$
এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,
$$\boldsymbol{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}.$$

উদা. 1. $3a - 4b$ এর বর্গ নির্ণয় কর।
$$(3a-4b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(4b) + (4b)^2$$
$$= 9a^2 - 24ab + 16b^2.$$

উদা. 2. $x - y - z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।
$$(x-y-z)^2 = \{x - (y+z)\}^2$$
$$= x^2 - 2x(y+z) + (y+z)^2$$

$$=x^2-2xy-2xz+y^2+2yz+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz.$$

উদা. 3. $2x-3y-4z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x-3y-4z)^2=\{2x-(3y+4z)\}^2$$
$$=(2x)^2-2(2x)(3y+4z)+(3y+4z)^2$$
$$=4x^2-2(6xy+8xz)+\{(3y)^2+2(3y)(4z)+(4z)^2\}$$
$$=4x^2-12xy-16xz+9y^2+24yz+16z^2$$
$$=4x^2+9y^2+16z^2-12xy-16xz+24yz.$$

উদা. 4. $a-b-c+d$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a-b-c+d)^2=\{(a-b)-(c-d)\}^2$$
$$=(a-b)^2-2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$
$$=(a^2-2ab+b^2)-2(ac-ad-bc+bd)+(c^2-2cd+d^2)$$
$$=a^2-2ab+b^2-2ac+2ad+2bc-2bd+c^2-2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(ax-by+cz)^2+(ax-by-cz)^2-2(ax-by+cz)(ax-by-cz).$$

$ax-by+cz$ এর পরিবর্তে m এবং $ax-by-cz$ এর পরিবর্তে n ধরিয়া,

প্রদত্ত রাশি $=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$
$$=\{(ax-by+cz)-(ax-by-cz)\}^2$$
$$=(2cz)^2=4c^2z^2.$$

উদা. 6. $a=15$ এবং $b=6$ হইলে, $9a^2-48ab+64b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(3a)^2-2(3a)(8b)+(8b)^2$
$$=(3a-8b)^2$$
$$=(45-48)^2=(-3)^2=9.$$

প্রশ্নমালা 21

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. $x-3$.
2. $2x-5$.
3. $3x-5y$.
4. $ax-by$.
5. $8m-3n$.
6. $pm-qn$.

7. $p^2 - mn$.	8. $x^2y - xy^2$.	9. $x^3 - 2xz$.
10. $3a^3 - 5b^3$.	11. $-xyz - abc$.	12. $x^2yz - y^2zx$.
13. $a^2x^4 - b^2y^4$.	14. $a - 2b - 2c$.	15. $2x - 3y - 4z$.
16. $3m - 4n - 5q$.	17. $a^2 - 3b^2 - 5c^2$.	18. $x - y - a - b$.
19. $a - 2x - 3b - 4y$.	20. $90 - 1$.	21. $120 - 3$.
22. $500 - 2$.	23. $1000 - 7$.	

সরল কর :

24. $(a+3b)^2 - 2(a+3b)(a-3b) + (a-3b)^2$.

25. $(2a - 4b + 5c)^2 + (2a + 4b + 5c)^2 - 2(2a - 4b + 5c)(2a + 4b + 5c)$.

26. $(3a + 5b + 7c)^2 + (7c - 4a + 5b)^2 - 2(3a + 5b + 7c)(7c - 4a + 5b)$.

27. $(2x^2 - y^2 - 5z^2)^2 - 2(2x^2 - y^2 - 5z^2)(6z^2 + 2x^2 - y^2) + (6z^2 + 2x^2 - y^2)^2$.

28. $(ab - bc + ca)^2 + (ab + 4bc + 2ca)^2 - 2(ab - bc + ca)(ab + 4bc + 2ca)$.

মান নির্ণয় কর :

29. $a^2b^2 - 12abc + 36c^2$, যখন $a = 4$, $b = 7$ এবং $c = 5$.

30. $x^2y^2 - 24xyz + 144z^2$, যখন $x = 7$, $y = 9$ এবং $z = 6$.

31. $25(x+y)^2 + z^2 - 10z(x+y)$, যখন $x = 47$, $y = -22$ এবং $z = 129$.

32. $9c^2 - 42c(a+b) + 49(a+b)^2$, যখন $a = -37$, $b = 57$ এবং $c = 45$.

33. $64(7p - 5q)^2 - 96(7p - 5q)r + 36r^2$, যখন $p = 28$, $q = 32$ এবং $r = 46$.

34. $c - \frac{1}{c} = 4$ হইলে, দেখাও যে, $c^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = 18$.

56. সূত্র : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$[(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.]$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির সমষ্টি ও বিয়োগফলের গুণফল, রাশি দুইটির বর্গদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান।

টীকা। বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. সুতরাং, $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে; রাশিদ্বয়ের সমষ্টি ও বিয়োগফল—এই দুইটি উৎপাদককে বিশ্লেষণ করা যায়।

[কোন একটি রাশি, অন্য দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে, শেষোক্ত রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে পূর্বোক্ত রাশিটির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (factor) বলে।]

উদা. 1. $3x+5y$ কে $3x-5y$ দ্বারা গুণ কর।

$$(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2$$
$$=9x^2-25y^2.$$

উদা. 2. $a+b-c$ কে $a-b+c$ দ্বারা গুণ কর।

$$(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

উদা. 3. x^2+xy+y^2 কে x^2-xy+y^2 দ্বারা গুণ কর।

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4.$$

উদা. 4. সরল কর : $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$.

প্রদত্ত রাশি $=\{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)\}$
$\times\{(a^2+ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)\}$
$=(2a^2+2b^2)\times 2ab$
$=2(a^2+b^2)\times 2ab=4ab(a^2+b^2).$

উদা. 5. $(9726854)^2-(9726849)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(9726854+9726849)(9726854-9726849)$
$=19453703\times 5=97268515.$

উদা. 6. $(a+b)^2-(c-d)^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}$
$=(a+b+c-d)(a+b-c+d).$

উদা. 7. $16a^4-81x^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=(4a^2)^2-(9x^2)^2$
$=(4a^2+9x^2)(4a^2-9x^2).$

আবার, $4a^2-9x^2=(2a)^2-(3x)^2=(2a+3x)(2a-3x)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=(4a^2+9x^2)(2a+3x)(2a-3x)$.

প্রশ্নমালা 22

গুণ কর :

1. $x+3$ এবং $x-3$.
2. $5x+13$ এবং $5x-13$.
3. $x+2a$ এবং $x-2a$.
4. $ax+by$ এবং $ax-by$.
5. $am+n^2$ এবং $am-n^2$.
6. $xy+yz$ এবং $xy-yz$.
7. x^2-2yz এবং x^2+2yz.
8. x^2y+xy^2 এবং xy^2-x^2y.
9. $x+1, x-1$ এবং x^2+1.
10. a^2+b^2, a^2-b^2 এবং a^4+b^4.
11. $a+b+c$ এবং $a+b-c$.
12. $a+b+c$ এবং $a-b-c$.
13. m^2+mn+n^2 এবং m^2-mn+n^2.
14. $x^2+2xy+2y^2$ এবং $x^2-2xy+2y^2$.
15. $ax-by+cz$ এবং $ax+by-cz$.
16. $-ax+by+cz$ এবং $ax+by+cz$.
17. $b^2m-c^2n+a^2p$ এবং $b^2m+c^2n-a^2p$.
18. $a^3-8b^3+27c^3$ এবং $a^3+8b^3-27c^3$.
19. $a^2x^2-2ax+2$ এবং $a^2x^2+2ax+2$.
20. $a^4x^4-a^2x^2+1$ এবং $a^4x^4+a^2x^2+1$.
21. $m^2+\sqrt{2}.mn+n^2$ এবং $m^2-\sqrt{2}.mn+n^2$.
22. $x^2-\sqrt{2}x+1, x^2+\sqrt{2}x+1$ এবং x^4-1.

সরল কর :

23. $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$.
24. $(a-2b+3c)^2-(a+2b-3c)^2$.
25. $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$.
26. $(x+y-a+b)^2-(x-y+a-b)^2$.
27. $(2a+3b-5c+7d)^2-(2a-3b+5c-7d)^2$.

মান নির্ণয় কর :

28. $2345\times 2345-2343\times 2343$.
29. $(53497)^2-(53487)^2$.
30. $498567\times 498567-498562\times 498562$.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

31. $25x^2-36$.
32. $9a^2-16c^2$.
33. $16m^2-49n^2$.

34. $4p^2-81q^2$. **35.** $a^2x^2-64b^2$. **36.** $36x^4-121y^4$.
37. $49-64d^2$. **38.** $144c^2-25d^2$. **39.** $(a+b)^2-c^2$.
40. $(a+2b)^2-25c^2$. **41.** $4x^2-(3a-4b)^2$.
42. $a^2-(2b-3c)^2$. **43.** a^4-81b^4.
44. $(x-y)^2-(a-b)^2$. **45.** $81x^4-625y^4$.
46. $(4a+7b)^2-(3a-8b)^2$. **47.** $(3x+5y)^2-(2x-7y)^2$.
48. $(a+2b-3c)^2-(a+b-c)^2$. **49.** $(2m+3n-5p)^2-(2n+3p)^2$.
50. $(3x-4y+7z)^2-(2x-3y+5z)^2$.

57. সূত্র : $\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$;
অথবা $\boldsymbol{=a^3+b^3+3ab(a+b)}$.

$$[(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$
$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ ;$$

আবার, এই শেষোক্ত রাশি $=a^3+3ab(a+b)+b^3$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b).]$$

অনুসি.। $a^3+b^3=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}-3ab(a+b)$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b).$$

উদা. 1. $3a+5b$ এর ঘন (cube) নির্ণয় কর।

$$(3a+5b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(5b)+3(3a)(5b)^2+(5b)^3$$
$$=27a^3+3(9a^2)(5b)+3(3a)(25b^2)+125b^3$$
$$=27a^3+135a^2b+225ab^2+125b^3.$$

উদা. 2. সরল কর :

$$(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y).$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

'$x-y$' এর পরিবর্তে a এবং '$x+y$' এর পরিবর্তে b লিখিলে,

প্রদত্ত রাশি $=a^3+b^3+3a^2b+3b^2a$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$=(a+b)^3=\{(x-y)+(x+y)\}^3$$
$$(2x)^3=8x^3.$$

উদা. 3. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$=5^3-3\times 6\times 5=125-90=35.$$

উদা. 4. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=p^3-3p$.

যেহেতু, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$\therefore\quad x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=p^3-3p$.

উদা. 5. $p+q+r$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(p+q+r)^3=\{(p+q)+r\}^3$$

$$=(p+q)^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$$

$$=(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+3(p^2+2pq+q^2)r+3(p+q)r^2+r^3$$

$$=p^3+q^3+r^3+3p^2q+3pq^2+3p^2r+3pr^2+3q^2r+3qr^2+6pqr.$$

উদা. 6. $x=5$ এবং $y=-2$ হইলে, $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=x^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$

$$=(x+3y)^3=(5-6)^3=(-1)^3=-1.$$

প্রশ্নমালা 23

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন (cube) নির্ণয় কর :

1. $x+3$. **2.** $2x+1$. **3.** $3a+b$. **4.** $4x+3y$.
5. x^2+2y. **6.** $xy+yz$. **7.** a^2b+c^2d. **8.** $a+b+2c$.
9. $2x+3y+z$. **10.** x^3+y^3.

সরল কর :

11. $(3m+5n)^3+3(3m+5n)^2(2m-5n)+3(3m+5n)(2m-5n)^2+(2m-5n)^3$.

12. $(3x-8y)^3+(9y-2x)^3+3(x+y)(3x-8y)(9y-2x)$.

13. $(3a-7b)^3+(10b-3a)^3+9b(3a-7b)(10b-3a)$.
14. $(5x-2)^3+(3-4x)^3+3(x+1)(5x-2)(3-4x)$.
15. $(3-7x)^3+(8x-1)^3+3(8x-1)(3-7x)(x+2)$.
16. $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$.

a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর :

17. যখন $a+b=6$ এবং $ab=7$.
18. যখন $a+b=7$ এবং $ab=8$.
19. $a+\frac{1}{a}=3$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3=18$.
20. $z+\frac{1}{z}=4$ হইলে, $z^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

21. $x^3+6x^2+12x+8$, যখন $x=-2$.
22. $x^3+12x^2+48x+64$, যখন $x=-5$.
23. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$, যখন $a=-3$ এবং $b=2$.
24. $x^3+18x^2+108x+351$, যখন $x=-11$.
25. $x+y=5$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3+15xy=125$.
26. $a^2+b^2=c^2$ হইলে, দেখাও যে, $a^6+b^6+3a^2b^2c^2=c^6$.
27. $p+q=2$ হইলে, দেখাও যে, $p^3+q^3+6pq=8$.

58. সূত্র : $\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$,
অথবা, $\boldsymbol{=a^3-b^3-3ab(a-b)}$.

$$[\ (a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

এবং শেষোক্ত রাশি $=a^3-3ab(a-b)-b^3$
$=a^3-b^3-3ab(a-b).]$

অনুসি. । $a^3-b^3=\{a^3-b^3-3ab(a-b)\}+3ab(a-b)$
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$.

উদা. 1. $3x-4y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(3x-4y)^3=(3x)^3-3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2-(4y)^3$$
$$=27x^3-3(9x^2)(4y)+3(3x)(16y^2)-64y^3$$
$$=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3.$$

উদা. 2. $a-b-c$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(a-b-c)^3=\{(a-b)-c\}^3$$
$$=(a-b)^3-3(a-b)^2c+3(a-b)c^2-c^3$$
$$=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-3(a^2-2ab+b^2)c+3(a-b)c^2-c^3$$
$$=a^3-b^3-c^3-3a^2b+3ab^2-3a^2c+3ac^2-3b^2c-3bc^2+6abc.$$

উদা. 3. $x=2\frac{1}{3}$ হইলে, $27x^3-54x^2+36x-64$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(3x)^3-3(9x^2).2+3(3x).4-8-56$
$=(3x-2)^3-56.$

অতএব, নির্ণেয় মান $=(7-2)^3-56=125-56=69.$

প্রশ্নমালা 24

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :

1. $x-2$.
2. $2x-1$.
3. $2-3a$.
4. $3-4a$.
5. $2a-3b$.
6. $5m-4n$.
7. $2x-5y$.
8. $2a-b-c$.
9. $2x-3y-z$.
10. $p^2-q^2-r^2$.

সরল কর :

11. $(a+2b)^3-3(a+2b)^2(a-2b)+3(a+2b)(a-2b)^2-(a-2b)^3$.
12. $(3x-8y)^3-(2x-7y)^3-3(3x-8y)(2x-7y)(x-y)$.
13. $(5x-8)^3-(3x-8)^3-6x(5x-8)(3x-8)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

14. $m^3-12m^2n+48mn^2-64n^3$, যখন $m=12$ এবং $n=3$.
15. $27a^3-135a^2+225a-125$, যখন $a=4$.
16. $8-9a+27a^2-27a^3$, যখন $a=3$.
17. $216-144x+108x^2-27x^3$, যখন $x=3$.

18. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^3-\left(\frac{1}{a}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

19. $c-\frac{1}{c}=5$ হইলে, $c^3-\left(\frac{1}{c}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

20. $x-y=3$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-y^3-9xy=27$.

21. $p-2q=4$ হইলে, দেখাও যে, $p^3-8q^3-24pq=64$.

22. $2a-3b=5$ হইলে, দেখাও যে, $8a^3-27b^3-90ab=125$.

59. সূত্র: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

$$[(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=(a^3-a^2b+ab^2)+(a^2b-ab^2+b^3)$$
$$=a^3+b^3.]$$

। বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. সুতরাং, a^3+b^3 এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে সর্ব্বদা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদা. 1. x^4-x^2+1 কে x^2+1 দ্বারা গুণ কর।

x^2 এর পরিবর্ত্তে a, এবং 1 এর পরিবর্ত্তে b লিখিলে,

$$x^4-x^2+1=(x^2)^2-x^2.1+1^2$$
$$=a^2-ab+b^2.$$

অতএব, $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$$=a^3+b^3$$
$$=(x^2)^3+1^3=x^6+1.$$

উদা. 2. $9x^2-12x+16$ কে $3x+4$ দ্বারা গুণ কর।

$3x$ এর পরিবর্ত্তে a এবং 4 এর পরিবর্ত্তে b লিখিলে,

$$9x^2-12x+16=(3x)^2-(3x).4+4^2$$
$$=a^2-ab+b^2.$$

সুতরাং, $(3x+4)(9x^2-12x+16)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$$=a^3+b^3=(3x)^3+4^3$$
$$=27x^3+64.$$

উদা. 3. $16a^2-20ab+25b^2$ কে $4a+5b$ দ্বারা গুণ কর।

$4a$ এর পরিবর্তে x, এবং $5b$ এর পরিবর্তে y লিখিলে,

$$16a^2-20ab+25b^2=(4a)^2-(4a)(5b)+(5b)^2$$
$$=x^2-xy+y^2.$$

সুতরাং, $(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2)$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=x^3+y^3=(4a)^3+(5b)^3$$
$$=64a^3+125b^3.$$

উদা. 4. $a^3b^3+8c^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^3b^3+8c^3=(ab)^3+(2c)^3$$
$$=(ab+2c)\{(ab)^2-(ab)(2c)+(2c)^2\}$$
$$=(ab+2c)(a^2b^2-2abc+4c^2).$$

প্রশ্নমালা 25

গুণ কর :

1. x^2-x+1 কে $x+1$ দ্বারা। 2. $1-2x+4x^2$ কে $1+2x$ দ্বারা।
3. $25p^2-5p+1$ কে $5p+1$ দ্বারা।
4. $49a^2-28ab+16b^2$ কে $7a+4b$ দ্বারা।
5. $64x^2-24xy+9y^2$ কে $8x+3y$ দ্বারা।
6. $a^2b^2-4abc+16c^2$ কে $ab+4c$ দ্বারা।
7. $a^2x^2-5abx+25b^2$ কে $ax+5b$ দ্বারা।
8. $25a^2-45ab+81b^2$ কে $5a+9b$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (resolve into factors) :

9. a^3+1. 10. x^3+8. 11. $8x^3+1$.
12. $27a^3+8$. 13. $8m^3+64$. 14. $64p^3+125$.
15. $8x^3+216y^3$. 16. $27a^3+343y^3$. 17. $216a^3x^3+y^3$.
18. $27a^3b^3+64x^3y^3$. 19. $729a^3b^3c^3+1000x^3y^3z^3$.
20. $1331a^3b^6x^9+729c^3y^6z^9$.

60. সূত্র : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

$$[(a-b)(a^2+ab+b^2)=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a^3+a^2b+ab^2)-(a^2b+ab^2+b^3)$$
$$=a^3-b^3.]$$

টীকা। বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. অতএব, $a^3 - b^3$ এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে সর্ব্বদা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে।

উদা. 1. $4a^2b^4 + 2ab^2 + 1$ কে $2ab^2 - 1$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2ab^2-1)(4a^2b^4+2ab^2+1)$$
$$=(2ab^2-1)\{(2ab^2)^2+(2ab^2).1+1^2\}$$
$$=(2ab^2)^3-1^3=8a^3b^6-1.$$

উদা. 2. $64x^6 - a^3y^6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$64x^6-a^3y^6=(4x^2)^3-(ay^2)^3$$
$$=(4x^2-ay^2)\{(4x^2)^2+(4x^2)(ay^2)+(ay^2)^2\}$$
$$=(4x^2-ay^2)(16x^4+4ax^2y^2+a^2y^4).$$

প্রশ্নমালা 26

গুণ কর :

1. $1+2x+4x^2$ কে $1-2x$ দ্বারা। **2.** x^2+3x+9 কে $x-3$ দ্বারা।

3. $16a^2+4a+1$ কে $4a-1$ দ্বারা।

4. $x^4+2x^2yz+4y^2z^2$ কে x^2-2yz দ্বারা।

5. $9m^2+6mnq+4n^2q^2$ কে $3m-2nq$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

6. $125a^3-1$. **7.** $343x^3-8y^6$. **8.** $216k^3-125l^3$.

9. $1-512k^3$. **10.** $729m^3-64a^3n^6$.

61. সূত্র : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$$[\,(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$$
$$=x^2+(a+b)x+ab.]$$

টীকা। স্পষ্টই দেখা যায় যে, নিম্নলিখিত সূত্রগুলিও উপরোক্ত সূত্রটির অন্তর্ভুক্ত :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & (x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab\\(2) & (x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab\\(3) & (x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab\end{array}\right\}$$

দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$(x-a)(x-b)=\{x+(-a)\}\{x+(-b)\}$$
$$=x^2+\{(-a)+(-b)\}x+\{(-a)\times(-b)\}$$
$$=x^2-(a+b)x+ab.$$

অন্যান্যগুলির যথার্থতাও অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

অতএব, আমরা 61 নিয়মের সূত্রটি আরও পরিষ্কারভাবে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করিতে পারি :

$(x+a)(x+b)=x^2+$(a ও b এর বীজগণিতীয় যোগফল) x + (a ও b এর গুণফল)।

উদা. 1. $x+3$ এবং $x+4$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু, $3+4=7$ এবং $3\times4=12$, ∴ নির্ণেয় গুণফল $=x^2+7x+12$.

উদা. 2. $x-7$ এবং $x+4$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু, $-7+4=-3$ এবং $(-7)\times4=-28$, ∴ নির্ণেয় গুণফল $=x^2-3x-28$.

উদা. 3. $x+5$ এবং $x-9$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু, $5-9=-4$ এবং $5\times(-9)=-45$, ∴ নির্ণেয় গুণফল $=x^2-4x-45$.

উদা. 4. $x-2$ এবং $x+7$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু, $-2+7=5$ এবং $(-2)\times7=-14$, ∴ নির্ণেয় গুণফল $=x^2+5x-14$.

উদা. 5. $x-5$ এবং $x-8$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু, $-5-8=-13$ এবং $(-5)\times(-8)=40$, নির্ণেয় গুণফল $=x^2-13x+40$.

প্রশ্নমালা 27

গুণফল লিখ :

1. $x+1$ এবং $x+2$ এর।
2. $x+2$ এবং $x+9$ এর।
3. $x-5$ এবং $x+6$ এর।
4. $x-3$ এবং $x-11$ এর।

5. $a-11$ এবং $a+16$ এর।
6. $m-7$ এবং $m+19$ এর।
7. $p+13$ এবং $p-11$ এর।
8. $p+12$ এবং $p-17$ এর।
9. $x-4$ এবং $x+9$ এর।
10. $x-5$ এবং $x-10$ এর।
11. $x-12$ এবং $x+5$ এর।
12. $k-13$ এবং $k+2$ এর।
13. $a+5$ এবং $a+14$ এর।
14. $m-14$ এবং $m+6$ এর।
15. $x-5$ এবং $x-13$ এর।
16. $x+7$ এবং $x+12$ এর।
17. $a-3$ এবং $a-11$ এর।
18. $x+4$ এবং $x-13$ এর।
19. $m+5$ এবং $m-16$ এর।
20. $x-8$ এবং $x-10$ এর।
21. $a+6$ এবং $a-12$ এর।
22. $m-7$ এবং $m+13$ এর।
23. $x-10$ এবং $x-16$ এর।
24. $x+5$ এবং $x-18$ এর।
25. $x-16$ এবং $x+10$ এর।

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

62. **সংজ্ঞা :** দুইটি রাশি সমতাচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ হইলে একটি **সমীকরণ** (equation) উৎপন্ন হইল বলা হইয়া থাকে ; এবং সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থিত রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে সমীকরণের একটি **পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলা হয়।

সমীকরণ শব্দটিকে অবশ্য এইরূপ ব্যাপক অর্থে প্রয়োগ করা হয় না। একটি বীজগণিতীয় রাশি অন্য একটি বীজগণিতীয় রাশির সমান হইলে, উহাদের সমতা, রাশিদ্বয়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্যও রক্ষিত হইতে পারে ; যথা, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; অথবা, অক্ষর বা অক্ষরসমূহের এক বা একাধিক নির্দিষ্ট মানের জন্যই কেবল মাত্র রক্ষিত হয়, যথা, $4x=8$ (যাহা কেবলমাত্র, $x=2$ হইলেই রক্ষিত হয়)। এই শেষোক্ত শ্রেণীকেই শুধু **সমীকরণ** (equation) [প্রকৃতপক্ষে, **সাপেক্ষ সমীকরণ** (equations of condition)] বলে, এবং পূর্বোক্ত শ্রেণীকে **অভেদ সমীকরণ** (identical equation) বা সংক্ষেপে শুধু **অভেদ** (identity) বলে।

যথা, $(x+1)+(2x+3)=3x+4$ একটি অভেদ ; কিন্তু $(x+1)+(x+3)=3x+2$ একটি সমীকরণ ; কারণ, প্রথম সমতাটি x এর যে কোন মানের জন্যই রক্ষিত

হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টি কেবল মাত্র $x=2$ হইলেই বজায় থাকে, অন্য কোন মানের জন্য বজায় থাকে না।

সমীকরণস্থিত যে অক্ষরটির এক বা একাধিক নির্দ্দিষ্ট মান সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমানমানবিশিষ্ট করে, সেই অক্ষরটিকে সমীকরণের **অজ্ঞাত রাশি** (unknown quantity) বলে। সাধারণতঃ, সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিকে বর্ণমালার শেষাংশের অক্ষরসমূহের (যথা, x, y, z,...এর) যে কোন একটি দ্বারা সূচিত করা হয়।

অজ্ঞাতরাশির যে নির্দ্দিষ্ট মানটি বা মানগুলি সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমান করে, সেই মানটি বা মানগুলিদ্বারা সমীকরণটি **সিদ্ধ** হইয়াছে, এরূপ বলা হয়; এবং ঐ মানটি বা মানগুলিকে সমীকরণের **বীজ** (root অথবা solution) বলে।

কোন সমীকরণ '**সমাধান করা** (to solve)' অর্থে 'উহার বীজ নির্ণয় করা' বুঝায়।

যে সমীকরণে প্রথমশক্তিবিশিষ্ট একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাহাকে **সরল সমীকরণ** (simple equation) বলে।

63. স্বতঃসিদ্ধ : সমীকরণের সমাধান প্রণালী সাধারণতঃ নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভর করে :

(1) সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলিও সমান হইবে।

(2) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিযোগ করিলে বিয়োগফলগুলিও সমান হইবে।

(3) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান বস্তু দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলিও সমান হইবে।

(4) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান বস্তু দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলিও সমান হইবে।

অনুসি. 1. স্বতঃসিদ্ধ (1) ও (2) হইতে আমরা সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত অত্যাবশ্যকীয় নিয়মটি প্রবর্ত্তন করিতে পারি।

সমীকরণের যে কোন পার্শ্বের একটি পদকে উহার চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া অপর পার্শ্বে পক্ষান্তর (transpose) করা যাইতে পারে।

এই প্রক্রিয়াকে **পক্ষান্তরকরণ** (transposition) বলে।

ধর $x-a=b+c$; এই সমতার দুই পার্শ্বেই a যোগ করিলে,

$x-a+a=b+c+a$, ... [স্বতঃসিদ্ধ 1]

অথবা, $x=b+c+a$;

আবার, উপরোক্ত সমতার দুই পার্শ্ব হইতে c বিয়োগ করিলে,

$x-a-c=b+c-c=b,$ ... ... [স্বতঃসিদ্ধ 2]

অতএব প্রথম ক্ষেত্রে, বাম পার্শ্ব হইতে $-a$ কে পক্ষান্তর করিয়া ডা'ন পার্শ্বে $+a$ রূপে পাওয়া গেল, এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ডা'ন পার্শ্ব হইতে $+c$ কে পক্ষান্তর করিয়া বাম পার্শ্বে $-c$ রূপে পাওয়া গেল।

তদ্রূপ, $x-a=b-c+d$ হইলে, $x-a-b+c-d=0$ হইবে।

অনুসি. 2. সমীকরণস্থিত প্রত্যেকটি পদের চিহ্নই একসঙ্গে পরিবর্ত্তন করিলে সমীকরণের সমতা নষ্ট হয় না।

কারণ, ধর $x-a=b+c$;

তাহা হইলে, তৃতীয় স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে, $(x-a)\times(-1)=(b+c)\times(-1)$;

অথবা, $-x+a=-b-c.$

64. সহজ উদাহরণ : উপরোক্ত নিয়মাবলীর সাহায্যে সরল সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার পদ্ধতি পরিষ্কার করিয়া বুঝাইবার জন্য নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া গেল :

উদা. 1. সমাধান কর : $18x=54.$

[দ্রষ্টব্য : প্রশ্নটিকে আরও একভাবে বলা যায় ; যথা, $18x=54$ হইলে, x এর মান কত ?]

যেহেতু, $18x=54,$

অতএব, উভয় পক্ষকে 18 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\frac{18x}{18}=\frac{54}{18}$; অথবা $x=3.$

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $=3.$

উদা. 2. সমাধান কর : $3x+5=x+19.$

[দ্রষ্টব্য : অন্যরূপেও বলা যায় ; যথা, যদি $3x+5=x+19$ হয়, তবে x এর মান কত ?]

যেহেতু, $3x+5=x+19,$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$3x-x=19-5$; অথবা, $2x=14$;

এখন, উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$x = 7$ পাওয়া গেল। [স্বতঃসিদ্ধ 4]

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= 7$.

উদা. 3. সমাধান কর : $-11x + 2(3 - x) = 32.$

বন্ধনী অপসারণ করিয়া $-11x + 6 - 2x = 32,$

অথবা, $-13x + 6 = 32,$

অথবা, $-13x = 32 - 6,$ ... [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $-13x = 26.$

এখন, উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(-1) \times (-13x) = (-1) \times 26,$$

অথবা, $13x = -26$;

উভয় পক্ষকে 13 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x = -\tfrac{26}{13} = -2.$$

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= -2$.

উদা. 4. সমাধান কর : $(x+2)(3x+4) - 6x = 10 + (3x+2)(x+1).$

বাম পক্ষ $= 3x^2 + 10x + 8 - 6x = 3x^2 + 4x + 8$;

ডা'ন পক্ষ $= 10 + 3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 5x + 12$;

অতএব, $3x^2 + 4x + 8 = 3x^2 + 5x + 12.$

উভয় পক্ষ হইতে $3x^2$ বাদ দিয়া,

$4x + 8 = 5x + 12$; [স্বতঃসিদ্ধ 2]

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$4x - 5x = 12 - 8$; অথবা, $-x = 4$;

কাজেই, $x = -4$ [পূর্ব নিয়মের দ্বিতীয় অনুসি.]

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= -4$.

টীকা। অতি সহজেই প্রত্যক্ষ করা যাইতে পারে যে, সমীকরণের উভয় পক্ষে x এর পরিবর্তে উহার এই মান (অর্থাৎ -4) বসাইলে, প্রত্যেক পক্ষই 40 এর সমান হয়।

উদা. 5. $\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু, $\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{3} + \frac{x}{4},$

উভয় পক্ষকে 12 (হরগুলির ল. সা. গু.) দ্বারা গুণ করিয়া,

$$12\left(\frac{x}{6}+5\right)=12\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right),$$

অথবা, $2x+60=4x+3x=7x$;

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $2x-7x=-60$,

অথবা, $-5x=-60$;

কাজেই, -5 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিয়া, $x=12$.

সুতরাং, সমীকরণের নির্ণেয় বীজ $=12$.

প্রশ্নমালা 28

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :

1. $4x=16$. **2.** $3x=-15$. **3.** $7x=-28$.

4. $-5x=25$. **5.** $\frac{x}{5}=-1$. **6.** $\frac{-x}{3}=20$.

7. $3x+5(2-x)=-16$. **8.** $5(1-x)+3(2-x)=-29$.

9. $4(2-x)+2(3-2x)=30$. **10.** $7(3-2x)+5(x-1)=34$.

11. $4x+3=2x+5$. **12.** $3x+2=x+6$.

13. $5x-6=2x+3$. **14.** $15x-9=11x-25$.

15. $4(x-3)=2(x-6)$. **16.** $2(x-15)=5(x-11)+4$.

17. $19-3x=5x+35$.

18. $3(x-2)+7(2x-3)=5(1-2x)-59$.

19. $13x-4(5x-8)+17=0$.

20. $14(x-4)+3(x+5)=6(7-2x)+4$.

21. $8(2x-7)-9(3x-14)=15$. **22.** $3x-13(2x-13)=4x-20$

23. $49+13(5x+27)=8(5+x)-3x$.

24. $16-5(7x-2)=13(x-2)+4(13-x)$.

25. $8x+5(x+7)+9(2x+23)-3(x+6)=0$.

26. $(x-7)(4x-29)=(2x-5)(2x-17)+1$.

27. $(3x+2)(2x-6)=(4-3x)(1-2x)-10$.

28. $(3x+5)(6x-7)=(3x+2)(9x-13)-(3x+1)(3x-1)$.

29. $(x+2)(2x+5)=2(x+1)^2+13.$
30. $(x+1)(4x-7)-(x-1)(x+5)=3(x+2)^2+5.$
31. $\frac{x}{2}+5=\frac{x}{3}+7.$ 32. $\frac{x}{6}-\frac{x}{5}=\frac{x}{15}-\frac{x}{3}+7.$
33. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2-\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}.$

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Problems leading to Simple Equations)

65. সাঙ্কেতিক বাক্য (Symbolical Expression) : সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী সমাধান করার পক্ষে, প্রতীক সাহায্যে প্রশ্ন-প্রদত্ত সর্ত্তসমূহের যথাযথ সাঙ্কেতিক বাক্য (symbolical expression) গঠন করাতেই প্রধান অসুবিধা। সুতরাং প্রশ্নাবলী সমাধান করার পূর্ব্বে ছাত্রগণের প্রথমতঃ এই বিষয়েই বিশেষ অভ্যস্ত হওয়া কর্ত্তব্য। নিম্নপ্রদত্ত উদাহরণগুলি দ্বারা এই বিষয়ের বিশেষ ধারণা হইবে।

উদা. 1. একজন লোক মাসিক x টাকা আয় করিলে, অর্দ্ধ মাসে সে কতগুলি সিকি আয় করিবে ?

যেহেতু, 1 টাকা = 4 সিকি,
অতএব, x টাকা = $4x$ সিকি।
সুতরাং, লোকটি মাসে $4x$ সিকি আয় করে ;
কাজেই, তাহার অর্দ্ধমাসের আয় = $4x$ সিকির অর্দ্ধ, অর্থাৎ $2x$ সিকি।

উদা. 2. একটি পোকা কোন খুঁটিতে যদি মিনিটে x ইঞ্চি করিয়া উঠিতে থাকে, তবে y ঘণ্টায় পোকাটি কত ফুট উঠিবে ?

যেহেতু, 1 ইঞ্চি = এক ফুটের $\frac{1}{12}$ ভাগ ;
অতএব, x ইঞ্চি = এক ফুটের $\frac{x}{12}$ ভাগ ;
কাজেই, এক মিনিটে পোকাটি $\frac{x}{12}$ ফুট উঠে ;

60 মিনিটে পোকাটি $\frac{x}{12} \times 60$ ফুট উঠে

অর্থাৎ, এক ঘণ্টায় পোকাটি $5x$ ফুট উঠে ;

y ঘণ্টায় পোকাটি $(5x \times y)$ ফুট উঠে ;

অতএব, নির্ণেয় ফুট-সংখ্যা $= 5xy$.

উদা. 3. প্রতি ঘণ্টায় x মাইল হিসাবে গমন করিলে, একজন লোকের 10 মাইল পথ যাইতে কত সময় লাগিবে ?

এক ঘণ্টায় x মাইল যায় ;

∴ এক মাইল যাওয়ার সময় $= \frac{1}{x}$ ঘণ্টা ;

10 মাইল যাওয়ায় সময় $= \frac{10}{x}$ ঘণ্টা ;

অতএব, নির্ণেয় সময় $= \frac{10}{x}$ ঘণ্টা ।

উদা. 4. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যাব বামদিকেব অঙ্কটি x দ্বারা এবং ডা'নদিকের অঙ্কটি y দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইলে, সংখ্যাটিকে কি প্রকারে সূচিত করিবে ?

বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া অঙ্ক দুইটি যথাক্রমে,

4 ও 5 হইলে, সংখ্যাটি $= 10 \times 4 + 5$;

5 ও 7 হইলে, সংখ্যাটি $= 10 \times 5 + 7$;

8 ও 4 হইলে, সংখ্যাটি $= 10 \times 8 + 4$; ইত্যাদি।

অতএব, ইহা সুস্পষ্ট যে, বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া অঙ্ক দুইটি যথাক্রমে x ও y হইলে, নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 10 \times x + y$, অর্থাৎ, $10x + y$.

প্রশ্নমালা 29

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 15 ; উহাদের একটি যদি x হয়, অপরটি কত ?
2. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 20 ; বড়টি x হইলে, অপরটি কত ?
3. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 25 ; ছোটটি x হইলে, বড়টি কত ?
4. 25 হইতে y কত বড় ?
5. y হইতে $2x$ কত ছোট ?
6. 21 এর একটি উৎপাদক x হইলে, অপরটি কত ?
7. কোন্ সংখ্যাটি 100 হইতে $3x$ পরিমিত ছোট ?
8. $4x$ হইতে কোন্ সংখ্যা বাদ দিলে $3y$ অবশিষ্ট থাকে ?

9. একটি লোক ঘণ্টায় y মাইল হিসাবে পরিভ্রমণ করিলে, x ঘণ্টায় সে কত মাইল পরিভ্রমণ করিবে ?

10. যদি এক ব্যক্তি ঘণ্টায় y মাইল হিসাবে পরিভ্রমণ করে, তবে x মাইল পথ সে কত সময়ে পরিভ্রমণ করিবে ?

11. এক ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স x বৎসর হইলে, 20 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ? 3 বৎসর পূর্ব্বে তাহার বয়স কত ছিল ?

12. এক ব্যক্তি x দিনে 60 মাইল ভ্রমণ করিয়া থাকিলে, তাহার দৈনিক ভ্রমণের পরিমাণ কত ?

13. একটি রেলগাড়ী x ঘণ্টায় 30 মাইল অতিক্রম করিলে, এক সেকেণ্ডে উহা কত ফুট অতিক্রম করিবে ?

14. আমি সপ্তাহে x আনা হিসাবে খরচ করিয়া, আমার বাৎসরিক আয় $5x$ টাকা হইতে কত টাকা বাঁচাইতে পারি ?

15. এরূপ 5টি ক্রমিক সংখ্যা লিখ, যাহাদের মধ্যমটি x.

16. x ঠিক মধ্যম সংখ্যা হয়, এরূপ তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

17. $2m+1$ এর ঠিক পরবর্ত্তী অযুগ্ম সংখ্যাটি কত ?

18. $2x$ এর ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী যুগ্ম সংখ্যাটি কত ?

19. x ব্যক্তির একটি কাজ করিতে 10 দিন সময় লাগিলে, y ব্যক্তির কাজটি করিতে কত দিন সময় লাগিবে ?

20. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য a গজ এবং প্রস্থ b ফুট হইলে, ঘরটির ক্ষেত্রফলের পরিমাণ বর্গফুটে প্রকাশ কর।

21. পূর্ব্বপ্রশ্নে, 4 ফুটকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিলে, ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান কত ?

22. এক ব্যক্তি x মাইল পরিমিত পথ y ঘণ্টায় ভ্রমণ করিলে 20 মিনিটে সে কত মাইল ভ্রমণ করিবে ?

23. এক ব্যক্তি x মাইল a ঘণ্টায় ভ্রমণ করিলে, কত সময়ে সে 16 মাইল পরিমিত পথ ভ্রমণ করিবে ?

24. 20 বৎসর পূর্ব্বে এক ব্যক্তির বয়স $x-5$ বৎসর হইলে, তাহার বর্ত্তমান বয়স কত ? 30 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?

25. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যার ডানদিকের অঙ্কটি x এবং বামদিকের অঙ্কটি y হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

26. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি, বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া, যথাক্রমে x, y ও z হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

27. পূর্ব্বপ্রশ্নের অঙ্কগুলিকে বিপরীতক্রমে লইলে যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয়, তাহাকেই বা কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

66. সমীকরণ সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নাবলী (Easy Problems) : বর্ত্তমান অধ্যায়ে বর্ণিত বিষয়ের সহিত সুপরিচিত হইবার নিমিত্ত নিম্নে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই অজ্ঞাত রাশিটিকে (unknown quantity কে) x দ্বারা সূচিত করা হইবে।

উদা. 1. A ও B একত্রে 540 টাকা মূলধন লইয়া একটি যৌথ কারবার আরম্ভ করিল ; মূলধনে A এর অংশ B এর অংশ অপেক্ষা দ্বিগুণ হইলে, প্রত্যেকের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

ধর, B এর অংশ x দ্বারা সূচিত হইতেছে ; তাহা হইলে, A এর অংশ অবশ্যই $2x$.

অতএব, মোট মূলধন $= x + 2x = 3x$,

কিন্তু, মোট মূলধন 540 টাকা বলিয়া দেওয়া আছে ;

অতএব, $3x = 540$ টাকা।

$\therefore \quad x = 130$ টাকা।

অর্থাৎ, B এর অংশ $= 180$ টাকা।

সুতরাং, A এর অংশ $= (2 \times 180)$ টাকা, অর্থাৎ, 360 টাকা।

উদা. 2. 34 সংখ্যাটিকে এরূপ দুইটি ভাগে ভাগ কর, যেন ঐ ভাগদ্বয়ের বিয়োগফল 8 এর সমান হয়।

ধর, বড় ভাগটি x দ্বারা সূচিত হইতেছে।

তাহা হইলে, ছোট ভাগটি $34 - x$ দ্বারা সূচিত হইবে।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$x - (34 - x) = 8$$

অর্থাৎ $2x - 34 = 8$;

অথবা, $2x = 34 + 8 = 42$;

অতএব, $x = 21$.

সুতরাং, বড় ভাগটি 21 এবং ছোট ভাগটি $34 - 21$, অর্থাৎ, 13.

উদা. 3. কোন্ সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশ, উহার এক-পঞ্চমাংশ হইতে 4 বড় ?

ধর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{5} = 4$; অথবা, $5x - 3x = 60$;

অথবা, $2x = 60$; $\therefore \quad x = 30$.

উদা. 4. 10 বৎসর পূর্ব্বে B এর যে বয়স ছিল, 10 বৎসর পরে A এর বয়স তাহার দ্বিগুণ হইবে ; বর্ত্তমানে B অপেক্ষা A, 9 বৎসর বড় হইলে, উহাদের প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স কত ?

ধর, B এর বর্ত্তমান বয়স x দ্বারা সূচিত হইল।

তাহা হইলে, A এর বর্ত্তমান বয়স $x+9$ দ্বারা সূচিত হইবে।

কাজেই, 10 বৎসর পরে, A এর বয়স $=x+9+10=x+19$;

এবং 10 বৎসর পূর্ব্বে, B এর বয়স $=x-10$;

এখন, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $x+19=2(x-10)$; অথবা, $x+19=2x-20$;

পক্ষান্তর করিয়া, $2x-x=20+19$; অথবা, $x=39$;

অর্থাৎ, B এর বর্ত্তমান বয়স 39 বৎসর।

সুতরাং, A এর বর্ত্তমান বয়স 48 বৎসর।

প্রশ্নমালা 30

1. 9 ফুট দীর্ঘ একটি সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে ভাগ করা হইল যে, এক অংশ অপর অংশের দ্বিগুণ ; প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. একটি থলিতে যত সংখ্যক টাকা আছে, ঠিক তত সংখ্যক আধুলি আছে। থলিতে সর্ব্বশুদ্ধ 30 টাকা থাকিলে, উহাতে কতগুলি আধুলি আছে ?

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 50 এবং অন্তরফল 30 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

4. এমন একটি সংখ্যা বাহির কর, যাহা 96 ও উক্ত সংখ্যাটির অন্তরফলের পাঁচগুণ হয়।

5. একটি সংখ্যার আটগুণ, সেই সংখ্যাটির অর্দ্ধভাগ হইতে 90 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

6. একটি সংখ্যা হইতে 40 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশের সমান ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

7. কোন একটি সংখ্যা 35 হইতে যত বড় এবং 67 হইতে যত ছোট, সেই বৃদ্ধি ও হ্রাসের অন্তরফল 22 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

8. কোন একটি সংখ্যা 16 হইতে যত বড় তাহার চারিগুণ, 416 হইতে সংখ্যাটি যত ছোট তাহার সমান ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

9. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 129 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

10. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাকে 7 দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল 132 হইতে যত বড়, সংখ্যাটি 132 হইতে তত ছোট।

11. 90 কে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর, যেন এক অংশের তিনগুণ অপর অংশের চারিগুণের সহিত যোগ করিলে, যোগফল 335 হয়।

12. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 39 এবং একটির এক-পঞ্চমাংশ অন্যটির এক-অষ্টমাংশের সমান ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

13. কোন সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ উহার এক-নবমাংশ হইতে 5 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

14. কোন সংখ্যার এক-ষষ্ঠাংশ উহার এক-অষ্টমাংশ হইতে 3 বেশী হইলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

15. 21 কে এরূপ দুই অংশে ভাগ কর, যেন এক অংশের দশগুণ অবশিষ্টাংশের নয়গুণ হইতে 1 বেশী হয়।

16. একটি বাড়ীর এবং একটি বাগানের মূল্য একত্রযোগে £850 এবং বাগানের মূল্য বাড়ীর মূল্যের $\frac{5}{12}$ অংশ ; প্রত্যেকটির মূল্য নির্ণয় কর।

17. £420 দুই ব্যক্তির মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন এক ব্যক্তির প্রত্যেক শিলিং এর জন্য অপর ব্যক্তি অর্দ্ধ-ক্রাউন পায়।

18. দুইজন মেষপালক তাহাদের একপাল মেষকে নিজেদের মধ্যে মূল্যানুসারে সমানভাবে ভাগ করিয়া লইতে রাজী হইল। A 72টি মেষ লইল এবং B, A কে £35 দিয়া 92টি মেষ লইল। প্রত্যেক মেষের মূল্য সমান হইলে, একটির মূল্য নির্ণয় কর।

19. দুই ব্যক্তির বয়সের অন্তর 10 বৎসর। 15 বৎসর পূর্ব্বে জ্যেষ্ঠের বয়স কনিষ্ঠের ঠিক দ্বিগুণ ছিল ; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

20. পিতার বয়স বর্ত্তমানে পুত্রের বয়সের তিনগুণ, এবং 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

বিন্দু সংস্থাপন (Plotting of Points) :

লেখাবলী (Graphs)

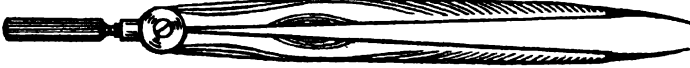
67. উপক্রমণিকা (Introduction) : দ্বিতীয় ও তৃতীয় অধ্যায়ে, বীজগণিতের বিষয়সমূহ লৈখিক দৃষ্টান্ত দ্বারা কি প্রকারে অতি সহজে এবং সুচারুরূপে বুঝান যাইতে পারে, তাহা দেখান হইয়াছে। বস্তুতঃ, সম্ভবস্থলে, লৈখিক চিত্রগুলি

আলোচ্য বিষয়সমূহের সম্যক্ ধারণা করিতে যথেষ্ট সহায়তা করে। লৈখিক চিত্র সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশিগুলির অভেদ সংস্থাপন ও বীজগণিতীয় সমীকরণসমূহের সমাধানের মুখবন্ধস্বরূপ, বর্ত্তমান অধ্যায়ে শুধু বীজগণিতীয় রাশিসমূহ কি ভাবে জ্যামিতিক বিন্দুগুলি দ্বারা সূচিত হইতে পারে, তাহাই দেখান হইবে। উপরোক্ত জ্যামিতিক চিত্রকেই **লেখ** (graph), এবং চিত্র সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশি বিষয়ক প্রশ্ন সমাধানের প্রক্রিয়াকে **লৈখিক প্রক্রিয়া** (graphical method) বলা হয়।

68. **আবশ্যকীয় যন্ত্রসমূহ:** শিক্ষার্থিগণের সর্ব্বপ্রথমে নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলিকে নিপুণভাবে ও যথাযথরূপে ব্যবহার করা শিক্ষা করিতে হইবে।

(ক) একটি আঁকিবার **পেন্সিল** (a drawing pencil).

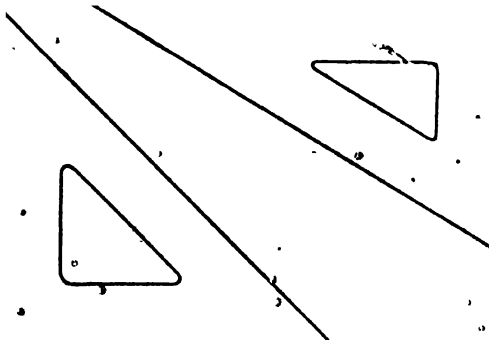
টীকা। পেন্সিলটির অগ্রভাগ এরূপ সূচাল হওয়া দরকার, যেন উহাদ্বারা অঙ্কিত রেখা বা বিন্দু অতি সূক্ষ্ম হয়।

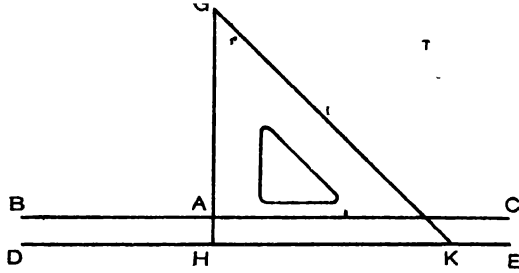
(খ) এক জোড়া **কাঁটা-কম্পাস্** (a pair of dividers).

(গ) দুইটি **ত্রিকোণী** (two set-squares).

(ঘ) এক ইঞ্চির দশমাংশসূচক চিহ্নবিশিষ্ট একখানি মাপনী (a graduated ruler shewing tenths of an inch).

(ঙ) এক ইঞ্চির শতাংশসূচক চিহ্নবিশিষ্ট একখানি মাপনী (a scale giving hundredths of an inch).

উদা. 1. A বিন্দু দিয়া এবং BC এর সমান্তরাল-করিয়া একটি সরলরেখা টান।

DEF ত্রিকোণীখানিকে এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন উহার DE ধারটি ঠিক BC রেখার সহিত মিলিয়া যায় ; তারপর GHK ত্রিকোণীখানির HK ধারটি DEF ত্রিকোণীর

EF ধারটির সহিত মিলাইয়া GHK ত্রিকোণীকে এরূপভাবে সরাইতে থাক, যেন উহার GH ধারটি A বিন্দু দিয়া যায়; এই অবস্থানে GH এর বরাবর একটি রেখা টানিলেই উহা BC এর সমান্তরাল হইবে (উপরের চিত্র দেখ)।

উদা. 2. BC সরলরেখার A বিন্দুতে BC এর উপর একটি লম্ব আঁক।

প্রথমে BC এর সমান্তরাল DE রেখাটি আঁক (চিত্র দেখ)। এখন GHK ত্রিকোণীখানি এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন উহার HK ধারটি DE-এর সহিত মিলিয়া যায় এবং GH ধারটি A বিন্দু দিয়া যায়। তাহা হইলে, HG এর বরাবর একটি রেখা টানিলেই উহা BC এর উপর A বিন্দুতে লম্ব হইবে।

উদা. 3. AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

A-

C-

শতাংশসূচক মাপনী এবং কাঁটা-কম্পাসের সাহায্যে দেখা গেল যে, AB এর দৈর্ঘ্য 2·24 ইঞ্চি এবং CD এর দৈর্ঘ্য 1·69 ইঞ্চি।

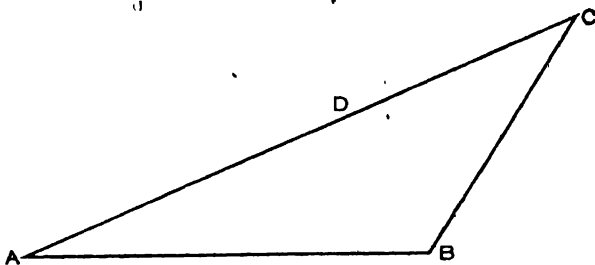
প্রশ্নমালা 31

1. AB সরলরেখাটিকে, উহার দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

-B

2. কোন একটি সরলরেখা AB এর উপর একটি বিন্দু D কে মধ্যবিন্দু বলিয়া

ধরা হইল.; কিন্তু কম্পাস্ দ্বারা মাপিয়া দেখা গেল যে, AD, BD হইতে কিঞ্চিৎ ছোট। কি করিয়া এই ভুল সংশোধন করা যাইবে ?

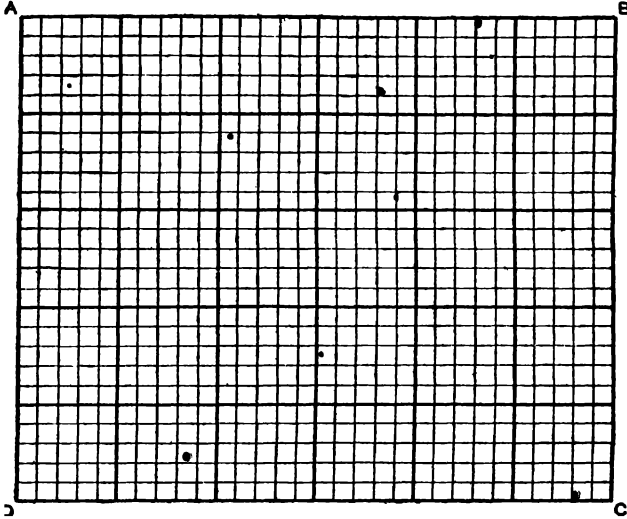
3. ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, AC এর উপরিস্থিত যে কোন এক বিন্দু (নিম্নের চিত্র দেখ) ; D বিন্দু দিয়া, AB এর দিকে CB এর সমান্তরাল করিয়া একটি রেখা অঙ্কিত কর।

4. উপরিস্থিত চিত্রে, D বিন্দু দিয়া, AC এর যে পার্শ্বে AB অবস্থিত উহার বিপরীত পার্শ্বে, BC এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

5. প্রশ্ন 3 এর চিত্রে, B বিন্দু দিয়া AC এর সমান্তরাল করিয়া একটি রেখা আঁক।

6. কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি হইতে উহাদের বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর লম্ব অঙ্কিত কর।

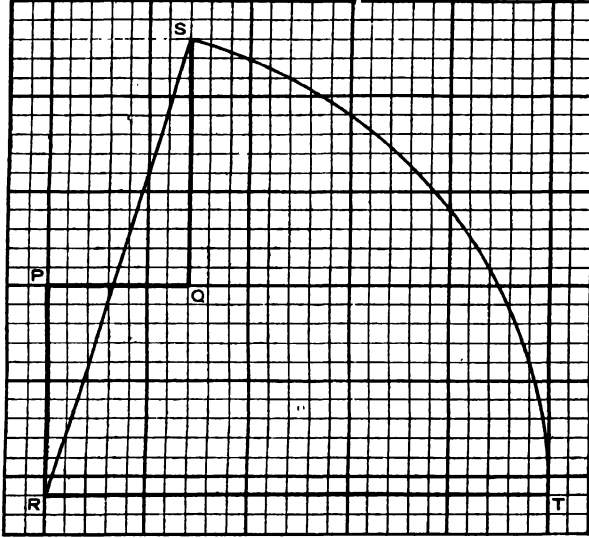
7. প্রশ্ন 3 এর চিত্রে, AB, BC, CA বাহু তিনটির এবং AD ও DC এর, দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

69. বর্গাঙ্কিত কাগজ (Squared paper) : বর্গাঙ্কিত কাগজের একটি নমুনা পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় দেওয়া হইল। উহাতে দুই শ্রেণীর সমদূরবর্ত্তী সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত আছে। এক শ্রেণীর রেখাসমূহ কাগজের দৈর্ঘ্যের এবং অপর শ্রেণীর রেখাসমূহ কাগজের প্রস্থের সমান্তরাল হওয়ায়, প্রথম শ্রেণীর প্রত্যেকটি রেখা দ্বিতীয় শ্রেণীর সকল রেখাকেই লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। প্রত্যেক শ্রেণীর রেখাগুলিই ধারাবাহিক ক্রমে পরস্পর এক-দশমাংশ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত বলিয়া, দুই শ্রেণীর রেখাসমূহের পরস্পর ছেদ হইতে কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পরস্পর-সমান বর্গক্ষেত্র

উৎপন্ন হইয়াছে। আবার, উভয় শ্রেণীতেই কতকগুলি অপেক্ষাকৃত স্থূল রেখা দেখা যায়, যাহারা পরস্পর অর্দ্ধ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত। অতএব, এই স্থূল রেখাগুলি দ্বারাও কতকগুলি অপেক্ষাকৃত বড় পরস্পর-সমান বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে, যাহাদের প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য অর্দ্ধ ইঞ্চি। স্পষ্টই দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি বড় বর্গক্ষেত্রের মধ্যে পঁচিশটি ছোট ছোট বর্গক্ষেত্র আছে।

টীকা 1. বর্গাঙ্কিত কাগজের নমুনাটিতে, AB এর সমান্তরাল রেখাগুলিকে **পূর্ব্ব-পশ্চিম** (east-west) রেখা এবং AD এর সমান্তরাল রেখাগুলিকে **উত্তর-দক্ষিণ** (north-south) রেখা বলা যাইতে পারে। উহাদিগকে যথাক্রমে **অনুভূমিক** (horizontal) ও **উল্লম্ব** (vertical) রেখা বলিয়াও কল্পনা করা যায়।

টীকা 2. সুবিধার জন্য যে কোন একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'a' দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

টীকা 3. উপরে প্রদর্শিত কাগজখানি এরূপেও রুল করা যাইতে পারে যে, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটারের এক-দশমাংশ অর্থাৎ এক মিলিমিটার হয়। সে ক্ষেত্রে, প্রত্যেক বড় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য অর্দ্ধ সেন্টিমিটার বা 5 মিলিমিটার হইবে।

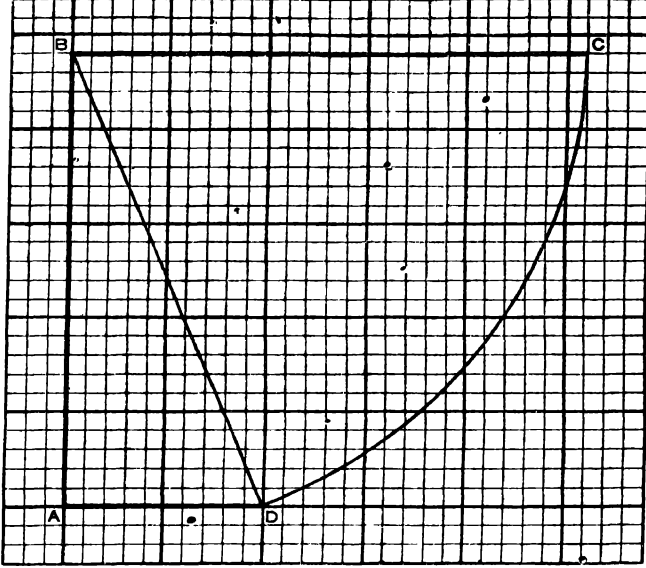
উদা. 1. চারিটি ষ্টেশন P, Q, R, S এরূপভাবে অবস্থিত যে, Q, P হইতে পূর্ব্বে 7 মাইল দূরে, R, P হইতে দক্ষিণে 11 মাইল দূরে, এবং S, Q হইতে উত্তরে 13 মাইল দূরে অবস্থিত। R হইতে S এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের যে কোন একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে a দ্বারা সূচিত করা হইল, এবং উহা এক মাইল পরিমিত দূরত্ব জ্ঞাপন করে। তাহা হইলে, P, Q, R, S এর অবস্থান উপরের চিত্রানুযায়ী হইবে, এবং $PQ=7a$, $PR=11a$, এবং $QS=13a$.

এখন, R কে কেন্দ্র করিয়া এবং RS কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক এবং মনে কর উহা R বিন্দু দিয়া অঙ্কিত 'পূর্ব্ব-পশ্চিম' সরলরেখাটিকে T বিন্দুতে ছেদ করিল;

এখন, যেহেতু $RT=25a$, অতএব, $RS=25a$;

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব $=25$ **মাইল**।

উদা. 2. একটি সোজা খুঁটি উল্লম্বভাবে (vertically) দাঁড় করান আছে; উহার উচ্চতা 8 ফুট। $8\frac{2}{3}$ ফুট দীর্ঘ একগাছা দড়ির এক প্রান্ত খুঁটিটির উপরিভাগে

বাঁধিয়া অপর প্রান্তটিকে এরূপভাবে মাটির সহিত সংলগ্ন করা হইল, যেন দড়িগাছা বেশ টান থাকে। খুঁটিটির পাদবিন্দু হইতে দড়িগাছার মাটিসংলগ্ন প্রান্তটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, $3a$ (অর্থাৎ, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিনগুণ) এক ফুট দৈর্ঘ্য সূচিত করিতেছে; তাহা হইলে, 8 ফুট দৈর্ঘ্য $24a$ দ্বারা এবং $8\frac{2}{3}$ ফুট দৈর্ঘ্য $26a$ দ্বারা সূচিত হইবে। এখন, খুঁটিটি AB দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইলে, $AB = 24a$. B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক (horizontal) সরলরেখাটির উপর C বিন্দু এরূপে লও, যেন $BC = 26a$. B কে কেন্দ্র করিয়া এবং BC কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এরূপ একটি বৃত্ত-চাপ আঁক, যাহা A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটিকে D বিন্দুতে কাটে। BD যুক্ত কর; তাহা হইলে, BD ই দড়িগাছার অবস্থান সূচিত করিবে।

এখন, AD কে $10a$ (অর্থাৎ $9a + a$) এর সমান দেখা যায়; অতএব উহার দৈর্ঘ্য $3\frac{1}{3}$ ফুট।

প্রশ্নমালা 32

1. A, O হইতে পূর্ব্বে $5\frac{1}{3}$ একক পরিমিত দূরে এবং P, A হইতে উত্তরে 4 একক পরিমিত দূরে অবস্থিত ; O হইতে P এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. B, O হইতে 3 ফুট পশ্চিমে, এবং Q, B হইতে $7\frac{1}{5}$ ফুট দক্ষিণে অবস্থিত ; O হইতে Q এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

3. C, O হইতে 2 গজ উত্তরে এবং R, C হইতে $6\frac{6}{7}$ গজ পশ্চিমে অবস্থিত ; O হইতে R এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. D, O হইতে 2·1 ইঞ্চি দক্ষিণে এবং S, D হইতে 2·8 ইঞ্চি পূর্ব্বে অবস্থিত ; S হইতে O এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. A, O হইতে 2·7 ফুট পূর্ব্বে অবস্থিত ; P, A এর উত্তরে এবং O হইতে 4·5 ফুট দূরে থাকিলে, P এবং A এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

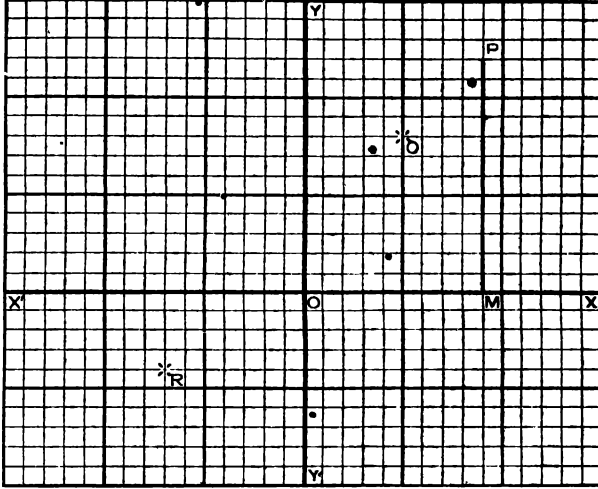
6. Q, B হইতে 2·4 ফুট দক্ষিণে আছে। O, B এর পূর্ব্বে এবং Q হইতে 2·5 ফুট দূরে অবস্থিত হইলে, O হইতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. B, A হইতে $4\frac{4}{5}$ গজ পূর্ব্বে ; C, A হইতে $\frac{3}{5}$ গজ উত্তরে এবং D, B হইতে 2 গজ উত্তরে অবস্থিত ; C এবং D এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. B, A হইতে 25 ফুট উত্তরে ; P, A হইতে 40 ফুট পশ্চিমে ; এবং Q, B হইতে 20 ফুট পূর্ব্বে অবস্থিত হইলে, Q এবং P এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

9. দুইটি উল্লম্ব (vertical) খুঁটি যথাক্রমে 14 ফুট ও $3\frac{4}{5}$ ফুট লম্বা এবং উহারা পরস্পর $13\frac{3}{5}$ ফুট দূরে অবস্থিত ; উহাদের উপরিস্থিত প্রান্তদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. 30 ফুট লম্বা একখানি মইএর পাদপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়াল হইতে 10 ফুট দূরে অবস্থিত। দেওয়ালের কত দূর পর্য্যন্ত মইখানির উর্দ্ধপ্রান্ত পৌঁছাইবে ? [প্রয়োজনানুসারে শতাংশসূচক মাপনী ব্যবহার করা যাইতে পারে।]

70. কোন সমতলে যদি একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত এবং পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা অবস্থিত থাকে, তবে ঐ রেখাদ্বয়ের সম্পর্কে, সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যাইতে পারে।

ধর, কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলে XOX' এবং YOY' দুইটি পরস্পরচ্ছেদী নির্দ্দিষ্ট সরল-রেখা, এবং উহারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত (উপরে প্রদর্শিত চিত্র দেখ)। P যদি সমতলস্থিত যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে P এর অবস্থান কিরূপে নির্ণয় করা যায়, দেখা যাউক।

আমরা XOX' রেখাটিকে পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখা এবং YOY' কে উত্তর-দক্ষিণ রেখা বলিয়া ধরিয়া লইতে পারি। P বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরল-রেখা আঁক এবং মনে কর, উহা XOX' রেখাটির সহিত M বিন্দুতে মিলিত হইল। (চিত্রানুসারে) স্পষ্টই, M, O বিন্দুর পূর্ব্বে এবং P, M বিন্দুর উত্তরে অবস্থিত। অতএব, OM এবং MP রেখাদ্বয়ের দৈর্ঘ্যমান জানা থাকিলে, P বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যায়।

উপরিস্থিত বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক-

নির্দ্দেশক মনে করিলে, $OM = 9$ একক দীর্ঘ এবং $MP = 12$ একক দীর্ঘ। অতএব, P বিন্দুর অবস্থান আমরা নিম্নলিখিতভাবে সূচিত করিতে পারি ঃ

পূর্ব্বে 9 একক দূরে, উত্তরে 12 একক দূরে।

টীকা 1. Q যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'পূর্ব্বে 5 একক দূরে, উত্তরে 8 একক দূরে' এই বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দেশ করা হইতেছে, তাহা হইলে, Q বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে আমাদিগকে O বিন্দুর পূর্ব্বে 5 একক পরিমিত দূরে একটি বিন্দু লইয়া, তৎপরে ঐ বিন্দু হইতে উত্তরে 8 একক পরিমিত দূরে যাইতে হইবে।

টীকা 2. R যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'O হইতে পশ্চিমে 7 একক দূরে, দক্ষিণে 4 একক দূরে', এই বর্ণনা দ্বারা সূচিত হইতেছে, তবে R বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে, আমাদিগকে O বিন্দুর পশ্চিমে 7 একক পরিমিত দূরে যাইয়া, তথা হইতে দক্ষিণে 4 একক পরিমিত দূরে যাইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 33

[প্রতিক্ষেত্রেই বর্গাঙ্কিত কাগজ (squared paper) ব্যবহার করিতে হইবে।]

1. যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা সূচিত, তাহাদিগকে স্থাপন কর ঃ

(1) 5 একক পূর্ব্বে, 7 একক উত্তরে ;
(2) 8 একক পশ্চিমে, 5 একক উত্তরে ;
(3) 10 একক পশ্চিমে, 12 একক দক্ষিণে ;
(4) 15 একক পূর্ব্বে, 6 একক দক্ষিণে ;
(5) 8 একক পশ্চিমে, 13 একক উত্তরে ;
(6) 14 একক পূর্ব্বে, 15 একক দক্ষিণে।

2. দ্বিতীয় অধ্যায়ের (অর্থাৎ, ধনরাশি ও ঋণরাশি সম্বন্ধীয় অধ্যায়ের) ব্যাখ্যা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, '6 একক পশ্চিমে' অথবা '−6 একক পূর্ব্বে' একই কথা। তদ্রূপ, '8 একক দক্ষিণে' বা '−8 একক উত্তরে' একই কথা, ইত্যাদি। এই অনুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট, তাহাদিগকে স্থাপন কর ঃ

(1) 7 একক পূর্ব্বে, −8 একক উত্তরে ;
(2) −10 একক পূর্ব্বে, 6 একক উত্তরে ;
(3) −9 একক পূর্ব্বে, −13 একক উত্তরে।

3. যদি ইহা সর্ব্বসম্মতিক্রমে স্বীকার করিয়া লওয়া হয় যে, পূর্ব্বদিকের দূরত্বগুলিকে সকল ক্ষেত্রেই প্রথমে লেখা হইবে, তাহা হইলে বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করার সময় 'পূর্ব্বে ও উত্তরে' শব্দ দুইটির উল্লেখ না করিলেও চলে। উপরোক্ত স্বীকৃতি অনুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নোক্ত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইতেছে, উহাদিগকে স্থাপন কর :

(1) 8 একক, 9 একক ; (2) 6 একক, -11 একক ;
(3) -12 একক, 15 একক ; (4) -10 একক, -14 একক।

4. প্রত্যেকস্থলেই 'একক' শব্দটিকে বাদ দিয়া, বিন্দুর অবস্থান আরও সংক্ষেপে সূচিত করা যায় ; এই প্রথা অনুসারে, নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

(1) 6, 4 ; (2) 13, 8 ; (3) -7, 6 ;
(4) 8, -6 ; (5) -10, -13 ; (6) -9, -15.

71. সংজ্ঞা : পূর্ব্বনিয়মে দেখান হইয়াছে যে, পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত XOX' এবং YOY' রেখা দুইটির সাহায্যে (পূর্ব্বনিয়মের চিত্র দেখ) সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যায়। এই স্থির রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) বলে ; এবং XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে **মূলবিন্দু** (origin), XOX' কে x-অক্ষরেখা (axis of x) এবং YOY' কে y-অক্ষরেখা (axis of y) বলা হয়। আবার, OM এবং MP এর দৈর্ঘ্যমানদ্বয়কে P বিন্দুর **ভুজ-কোটি** (co-ordinates) বলে ; OM এর দৈর্ঘ্যমানকে **ভুজ** (abscissa বা x-co-ordinate) এবং MP এব দৈর্ঘ্যমানকে **কোটি** (ordinate বা y-co-ordinate) বলা হয়।

'(x, y) বিন্দু' বা শুধু **'x, y' এর** অর্থ **'একটি বিন্দু, যাহার ভুজ (abscissa) x-একক দীর্ঘ এবং যাহার কোটি (ordinate) y-একক দীর্ঘ'।**

1. একটি বিন্দুর 'x এবং y' এর কথা বলা হইলে, প্রকৃতপক্ষে তদ্দ্বারা ঐ বিন্দুর যথাক্রমে ভুজ ও কোটির কথাই বলা হয়।

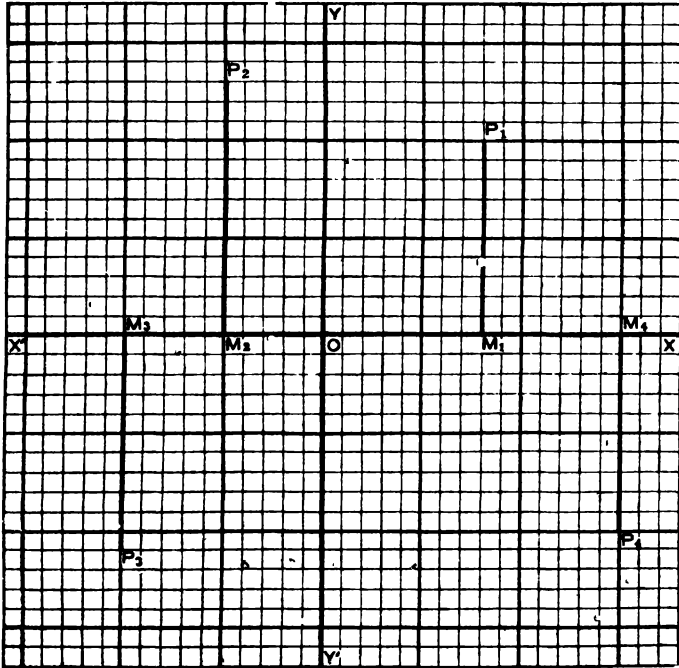
2. মূলবিন্দু O এর ডা'নদিকে M বিন্দু থাকিলে, (70 নিয়মের চিত্র দেখ) P বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে থাকিলে, ঐ ভুজটি ঋণাত্মক, বলা হইয়া থাকে। তদ্রূপ, P বিন্দু XOX' এর উপরিভাগে থাকিলে, P বিন্দুর কোটি ধনাত্মক, এবং P বিন্দু XOX' এর নীচে থাকিলে, P বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক, বলা হয়।

টীকা 3. 'বিন্দু সংস্থাপন করা (to plot a point)' এর অর্থ বিন্দুটির ভুজ-কোটি দেওয়া থাকিলে, উহার অবস্থান নিরূপণ করা।

উদা. 1. নিম্নপ্রদর্শিত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির ভুজ-কোটি লিখ।

চিত্রের ব্যাখ্যা অনাবশ্যক। ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে,

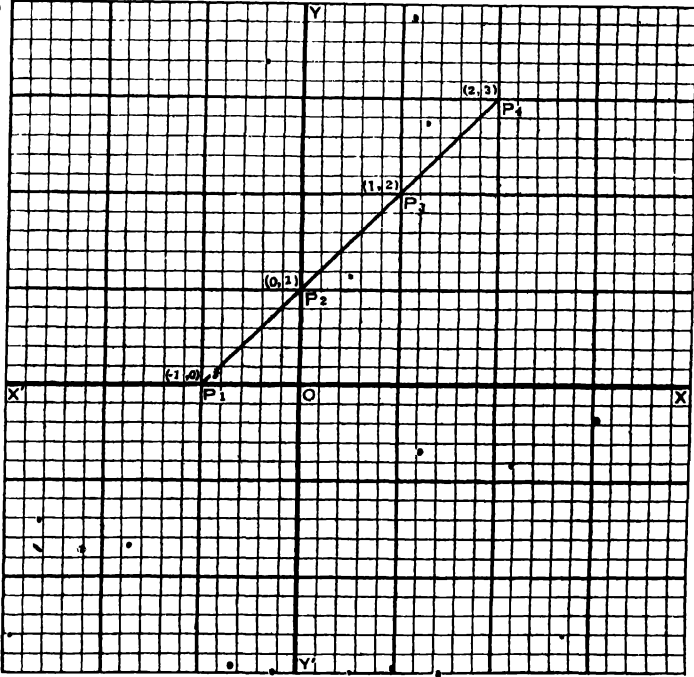
(1) $OM_1=8$ একক, এবং M_1, O বিন্দুর ডা'নদিকে অবস্থিত; আবার, $M_1P_1=10$ একক, এবং P_1 বিন্দুটি XOX' এর উপরিভাগে অবস্থিত। অতএব, P_1 বিন্দুটির ভুজ ও কোটি যথাক্রমে **8** এবং **10.**

(2) $OM_2=5$ একক, এবং M_2, O এর বামদিকে; আবার, $M_2P_2=13$ একক, এবং P_2 বিন্দুটি XOX' রেখার উপরিভাগে। অতএব, P_2 বিন্দুটির ভুজ ও কোটি যথাক্রমে **−5** ও **13.**

(3) $OM_3=10$ একক, এবং M_3, O এর বামদিকে; $M_3P_3=11$ একক এবং P_3, XOX' এর নীচে; কাজেই, P_3 বিন্দুটির ভুজ-কোটি **(−10, −11).**

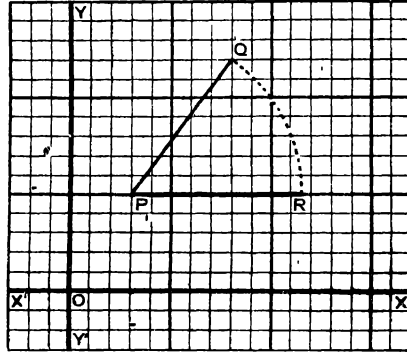
(4) $OM_4 = 15$ একক, এবং M_4, O এর ডা'নদিকে ; এবং $M_4P_4 = 10$ একক, এবং P_4, XOX' এর নীচে ; অতএব, P_4 বিন্দুটির ভুজ-কোটি **(15, – 10).**

উদা. 2. (– 1, 0), (0, 1), (1, 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর এবং দেখাও যে, উহারা সমরেখ।

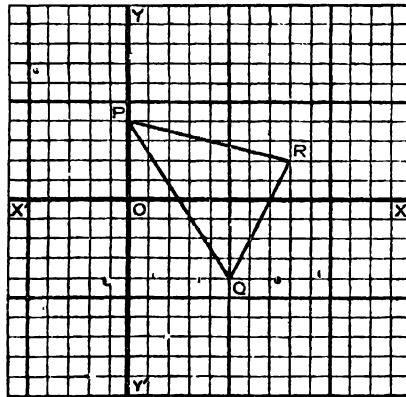
ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 5 গুণকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলিকে যথাস্থানে সংস্থাপন কর।

ধর, P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা এই বিন্দুচতুষ্টয়কে নির্দ্দিষ্ট করা হইল [চিত্র দেখ]।

এখন, একখানা মাপনীর এক পার্শ্ব উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দুর সহিত মিলাইয়া স্থাপন করিলে দেখা যাইবে, সেই পার্শ্ব অপর দুইটি বিন্দু দিয়াও যাইবে। অতএব, চারিটি বিন্দুই সমরেখ।

উদা. 3. (3, 5) এবং (8, 12) এই বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর, এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দু দুইটি সংস্থাপন কর। মনে কর, P ও Q ঐ বিন্দুদ্বয়কে নির্দ্দেশ করিতেছে [চিত্র দেখ]।

P কে কেন্দ্র করিয়া এবং PQ কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক ; ধর, উহা P বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখাটিকে R বিন্দুতে ছেদ কবিল।

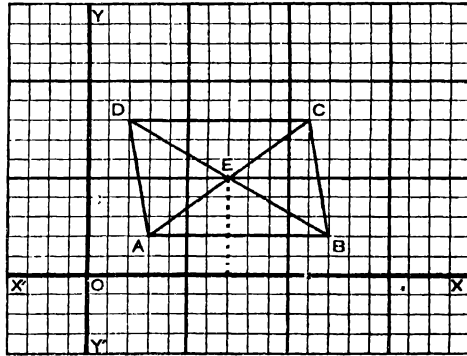
তাহা হইলে, নির্ণেয় দূরত্ব $=PQ=PR=8\cdot 6$ একক (চিত্র হইতে)।

উদা. 4. $P(0, 4)$, $Q(5, -4)$ এবং $R(8, 2)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন PQR ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, P, Q ও R এর অবস্থান, চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে, সেইরূপ হইবে। এখন, PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ ছোট

বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর ; তারপর, যে যে বর্গক্ষেত্রগুলির ভিতর দিয়া ত্রিভুজের বাহু গিয়াছে, তাহাদের মধ্যে যেগুলির অর্দ্ধ বা তদধিক অংশ ত্রিভুজের ভিতরে আছে সেইগুলিকে গণনা করিয়া বাকীগুলি বাদ দাও। যেহেতু, একটি ছোট বর্গক্ষেত্র 'ক্ষেত্রফলের একক' সূচিত করে, অতএব বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্দ্দেশ করিবে।

উপরোক্ত নিয়মে গণনা করিয়া PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 27 পাওয়া গেল।

অতএব, PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 27$ একক (ক্ষেত্রফলের)।

উদা. 5. $A(3, 2)$, $B(12, 2)$, $C(11, 8)$ এবং $D(2, 8)$ বিন্দুচতুষ্টয় সংস্থাপন কর। $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AC ও BD এর ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, A, B, C ও D এর অবস্থান, চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে, সেইরূপ হইবে।

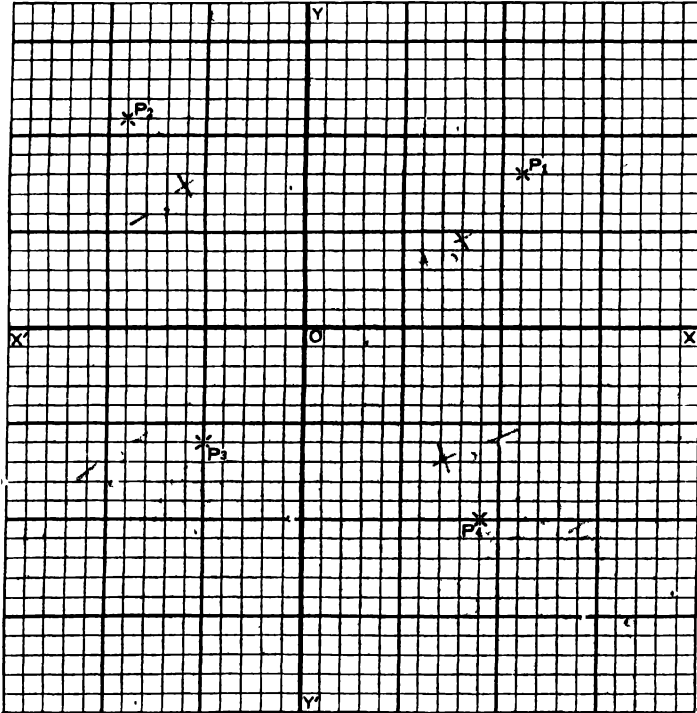
উদাহরণ 4 এ বর্ণিত নিয়মানুসারে গণনা করিয়া $ABCD$ চতুর্ভুজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 54 পাওয়া গেল।

অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 54$ একক (ক্ষেত্রফলের)।

আবার, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, AC ও BD এর ছেদবিন্দু E এর ভুজ 7 একক এবং কোটি 5 একক।

অতএব, E বিন্দুটির ভুজ-কোটি **(7, 5).**

প্রশ্নমালা 34

1. নিম্নপ্রদত্ত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির ভুজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর, যখন (1) ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইবে ; (2) ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যের পাঁচগুণকে একক ধরা হইবে।

2. ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যের তিনগুণকে 'একক'রূপে ধরা হইলে, উপরিপ্রদত্ত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির ভুজ-কোটি কি কি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

3. $(-4, -4)$, $(7, 7)$ ও $(13, 13)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহারা মূলবিন্দু (origin) দিয়া অতিক্রান্ত একটি সরলরেখায় অবস্থিত।

4. $(-8, 4)$ এবং $(10, -5)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর এবং প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।

5. $(8, 5)$ ও $(-4, -11)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. $(-7, 9)$ ও $(-12, 21)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. $(-11, 13)$ ও $(3, -35)$ বিন্দু দুইটি সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. $(0, 0)$ ও $(5, 5)$ বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিয়া একটি সরলরেখা টান এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। এই সরলরেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ 11 ; এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি -13.

9. $(0, 7)$ এবং $(12, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ -18, এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি -14.

10. $(-4, 0)$ এবং $(0, -8)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয়-দিকে বর্দ্ধিত কর ; এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ -10, এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি -24.

11. $A(3, 2)$, $B(3, 7)$ এবং $C(8, 5)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. $P(-2, 5)$, $Q(6, 5)$ এবং $R(8, 9)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $D(5, 2)$, $E(6, 8)$ এবং $F(7, 12)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. $(11, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 7)$ এবং $(11, 7)$ বিন্দু চারিটি দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ; উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

15. নিম্নলিখিত বিন্দু চারিটি দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(1) $(16, 6)$, $(2, 3)$, $(11, 14)$ এবং $(5, 11)$;

(2) $(3, 6)$, $(5, 4)$, $(17, 16)$ এবং $(9, 18)$;

(3) $(-12, 5)$, $(-12, -10)$, $(16, -10)$ এবং $(16, 5)$;

(4) $(0, 1)$, $(10, 8)$, $(2, 13)$ এবং $(-2, 8)$.

16. এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমি 12 সেন্টিমিটার এবং বাহুদ্বয় যথাক্রমে 5 এবং 13 সেন্টিমিটার। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল, উচ্চতা এবং বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর।

17. এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমি 6 সেন্টিমিটার এবং বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3 ও 5 সেন্টিমিটার। উহার উচ্চতা যথাসম্ভব সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ কর।

18. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর :

(i) (6, 0), (6, 3), (6, 4), (6, 6), (6, 8) এবং (6, 10) ;

(ii) (−2, 7), (3, 7), (5, 7), (7, 7), (8, 7) এবং (10, 7).

উপরিস্থিত (i) এর বিন্দুগুলি সমরেখ এবং (ii) এর বিন্দুগুলিও সমরেখ ; দেখাও যে, এই রেখাদ্বয় যথাক্রমে y-অক্ষরেখা ও x-অক্ষরেখার সমান্তরাল ; রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

19. (3, 4), (4, 3), (5, 0), (−4, −3), (4, −3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরত্বগুলি মাপিয়া দেখাও যে, উহারা মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত একটি বৃত্তের উপরে অবস্থিত।

20. $A(5, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 8)$, $D(9, 8)$ এবং $E(7, 12)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর ; $ABDEC$ পঞ্চভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AD ও BC এর ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি, নির্ণয় কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা II

I

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, এই অভেদটির মধ্যে a এর পরিবর্তে x এবং b এর পরিবর্তে $-y-z$ বসাইয়া $(x-y-z)$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত সূত্রদ্বয় প্রতিপন্ন কর :

(i) $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$;

(ii) $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$.

3. প্রমাণ কর যে,

$$(y-z)(y+z-x) + (z-x)(z+x-y) + (x-y)(x+y-z) = 0.$$

4. প্রমাণ কর যে,

$$(a-b)(a+1)(b+1)-a(b+1)^2+b(a+1)^2=(a-b)(a+b+2ab).$$

5. $a=x+m,\ b=y+m,\ c=z+m$ হইলে,
দেখাও যে, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

6. $s=a+b+c$ হইলে,
প্রমাণ কর যে, $(as+bc)(bs+ac)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$

7. $(m+n)^3-27p^3$ কে $m+n-3p$ দ্বারা ভাগ কর।

8. $(9x^2-17xy+13y^2)^2$ ভাজ্য, $49y^2(2x+5y)^2$ ভাগশেষ এবং $3x^2-xy+16y^2$ ভাজক হইলে, ভাগফল নির্ণয় কর।

9. $x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{8}{3}$ এবং $y+\dfrac{3}{x}=\dfrac{9}{2}$ হইলে, $x^3y^3+\dfrac{216}{x^3y^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে,

$$(x-y+z)^3+(x+y-z)^3+6x(x-y+z)(x+y-z)=8x^3.$$

II

নিম্নলিখিত সমীকরণ কয়টি সমাধান কর :

1. $3(x-3)-2(x-2)+x-1=x+3+2(x+2)+3(x+1).$
2. $(x-3)(x-5)=(x-2)(x-7).$
3. $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5).$

নিম্নলিখিত সমীকরণ কয়টি হইতে x এর মান নির্ণয় কর :

4. $(a+b)(b-x)=b(a-x).$

5. $\dfrac{mnx-p}{mn}+\dfrac{npx-m}{np}+\dfrac{pmx-n}{pm}=\dfrac{2p}{mn}+\dfrac{2m}{np}+\dfrac{2n}{pm}.$

6. $\dfrac{2x+7}{7}-\dfrac{9x+8}{11}=\dfrac{x-11}{2}.$ 7. $4x-\dfrac{x-1}{2}=x+\dfrac{2x-2}{5}+24.$

8. $x-\dfrac{x-2}{2}=5\dfrac{3}{4}-\dfrac{x+10}{5}+\dfrac{x-2}{4}.$

9. $\dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{2x-2}{3}+\dfrac{4x-3}{4}=\dfrac{1}{12}.$

10. $\frac{2}{3}(x-1)-\frac{5}{6}(2x-3)+\frac{3}{4}(1-2x)=\frac{1}{12}(4x-5).$

III

1. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার সহিত 29 যোগ করিলে, যোগফল ঐ সংখ্যাটির চতুর্গুণ হইতে ৪ বেশী হয়।

2. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার এক-সপ্তমাংশ উহার এক-নবমাংশ অপেক্ষা 4 বেশী।

3. এক ব্যক্তি তাঁহার মাসিক আয়ের দশভাগের একভাগ সঞ্চয় করেন এবং বাকী অংশের এক-তৃতীয়াংশ খুচরা দ্রব্যাদি ক্রয় করিতে খরচ করেন; মাসিক চল্‌তি খরচা বাবদ তাঁহার সমস্ত আয়ের পাঁচভাগের দুইভাগ খরচ করিয়া মাসশেষে তাঁহার নিকট 300 টাকা থাকিলে, ঐ ব্যক্তির মাসিক আয় কত?

4. এক ব্যবসায়ী তাঁহার তহবিলের পাঁচভাগের দুইভাগ চিনির ব্যবসায়ে, তিনভাগের একভাগ পাটের ব্যবসায়ে এবং বাকী অংশের অর্দ্ধেক কাপড়ের ব্যবসায়ে খাটাইয়া তাঁহার নিকট £300 রহিল; ঐ ব্যবসায়ীর মোট মূলধন এবং তিনি কোন্ ব্যবসায়ে কত খাটাইলেন, তাহা স্থির কর।

5. A এর বয়স B এর বয়সের দ্বিগুণ এবং C এর বয়স অপেক্ষা 4 বৎসর বেশী; উহাদের তিনজনের বয়সের সমষ্টি 96 বৎসর হইলে, প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

6. দুইটি থলির অর্থের সমষ্টি 54 পা. 12 শি., এবং একটি থলিতে যত সংখ্যক পাউণ্ড্ আছে, অন্যটিতে তত সংখ্যক শিলিং আছে; প্রত্যেক থলির অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

7. একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দু কয়টির অবস্থান নির্দ্দেশ কর এবং দেখাও যে, উহারা একটি আয়তক্ষেত্রের চারিটি কৌণিক বিন্দু: $(1\frac{1}{2}, 2)$, $(-1\frac{1}{2}, 2)$, $(-1\frac{1}{2}, -2)$ এবং $(1\frac{1}{2}, -2)$; আরও দেখাও যে, উপরোক্ত আয়তক্ষেত্রটির প্রত্যেক কর্ণেরই দৈর্ঘ্য 5 একক।

8. O একটি নির্দ্দিষ্ট স্থান; A, O হইতে 20 মাইল উত্তরে, B, A হইতে 4 মাইল পূর্ব্বে এবং C, B হইতে 17 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত; দেখাও যে, O এবং C এর দূরত্ব 5 মাইল।

9. উপরোক্ত উদাহরণে, A, O হইতে 12 মাইল পশ্চিমে, P, A হইতে 5 মাইল উত্তরে, B, O হইতে 12 মাইল পূর্ব্বে এবং Q, B হইতে 5 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত হইলে, প্রমাণ কর যে, P এবং Q এর দূরত্ব 26 মাইল।

10. একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দু কয়টির অবস্থান নির্দ্দেশ কর এবং দেখাও যে, উহারা মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখায় অবস্থিত:

$(-5, -10)$, $(1, 2)$ এবং $(3, 6)$.

অষ্টম অধ্যায়

জটিল যোগ ও বিয়োগ

(Harder Addition and Subtraction)

1. যোগ

72. তৃতীয় অধ্যায়ে যোগের নিম্নলিখিত নিয়মাবলী ব্যাখ্যা করা হইয়াছে :

(1) যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, যোজ্য রাশিগুলিকে যে কোন ক্রমে (orderএ) ই লওয়া যাইতে পারে। যথা,

$a+b+c=b+c+a=c+a+b$; ইত্যাদি। [নিয়ম 31]

ইহাকে যোগের **বিনিময়-নিয়ম** (Commutative Law) বলে।

(2) যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, যোজ্য রাশিগুলির কতক কতক এক এক ভাগে লইয়া, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (groupএ) ভাগ করা যায়, এবং নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগসমূহের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা,

$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c=b+(c+a)$, ইত্যাদি। [নিয়ম 32]

ইহাকে যোগের **সংযোগ-নিয়ম** (Associative Law) বলে।

(3) সাংখ্য-সহগ(numerical co-efficient)-যুক্ত সদৃশপদসমূহের যোগফলও একটি সদৃশপদ (like term) এবং পদগুলির সাংখ্য-সহগের বীজগাণিতীয় সমষ্টিই যোগফলের সাংখ্য-সহগ হইয়া থাকে। যথা, $5x$, $-2x$, $7x$ এবং $6x$ এর যোগফল $16x$; কারণ, $5+(-2)+7+6=16$. [নিয়ম 32, টীকা]

ইহাকে যোগের **পদ-সংযোগ প্রণালী** (process of *collecting terms*) বলে।

সদৃশ ও অসদৃশ পদযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিবার সাধারণ প্রণালীও 33 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

উপরোক্ত নিয়মাবলী এ পর্য্যন্ত কেবলমাত্র সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রযুক্ত হইয়াছে ; বর্ত্তমানে উহাদিগকে জটিল যোগফল নির্ণয় করিবার জন্য প্রয়োগ করা হইবে।

73. ভগ্নাংশ-সহগ (Fractional co-efficient) বিশিষ্ট মিশ্র-রাশিসমূহের যোগফল নির্ণয়: ভগ্নাংশ-সহগবিশিষ্ট মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে প্রত্যেকটি রাশিকে আবশ্যকমত সরল করিয়া তারপর রাশিগুলিকে, একটির নীচে একটি করিয়া, এরূপভাবে স্থাপন করিতে হইবে,

যেন বিভিন্ন রাশির অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে ; তারপর সর্ব্বনিম্ন রাশিটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেকটি স্তম্ভের পদগুলির সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিতে হইবে। যোগফলের সাংখ্য-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মানুসারে সরল করিয়া রাখিতে হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিষ্কার করিয়া বুঝান হইতেছে ঃ

উদা. 1. যোগ কর ঃ

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}-\frac{z}{7},\ -\frac{9}{10}y+\frac{12}{7}z+\frac{7}{3}x+12a \text{ এবং } \frac{3}{7}z-\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y-2b.$$

প্রথম রাশি $= \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{7}z$

দ্বিতীয় রাশি $= \frac{7}{3}x - \frac{9}{10}y + \frac{12}{7}z + 12a$

তৃতীয় রাশি $= -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{3}{7}z \quad -2b$

$\therefore$ যোগফল $= 2x + \frac{1}{10}y + 2z + 12a - 2b$

[যোগফলে, x এর সহগ $= \frac{1}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3} = \frac{1+7-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$;

y এর সহগ $= \frac{1}{5}-\frac{9}{10}+\frac{4}{5} = \frac{2-9+8}{10} = \frac{10-9}{10} = \frac{1}{10}$;

z এর সহগ $= -\frac{1}{7}+\frac{12}{7}+\frac{3}{7} = \frac{-1+12+3}{7} = \frac{14}{7} = 2$;

a এর সহগ $= 0+12+0 = 12$;

b এর সহগ $= 0+0-2 = -2$.]

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, প্রথম ও তৃতীয় রাশিতে a-সংযুক্ত পদের স্থানদ্বয়কে শূন্য রাখা হইয়াছে। সুবিধার জন্য ঐ স্থান দুইটিকে $0.a$ দ্বারাও পূর্ণ করা যাইত। তদ্রূপ, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিতে b-সংযুক্ত পদ দুইটির সহগদ্বয়কেও 0 বলিয়া ধরা যায়।

উদা. 2. $\frac{6x-2y}{6}+\frac{4y-3z}{12}+\frac{2z-4x}{8},\ \frac{4x-3y}{12}+\frac{6y-4z}{8}+\frac{3z-6x}{6}$ এবং $\frac{2x-4y}{8}+\frac{3y-2z}{6}+\frac{4z-6x}{12}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

পদ-সংযোগ প্রণালীমতে প্রত্যেকটি রাশিকে সরল করিয়া পূর্ব্বপ্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে। যথা,

প্রথম রাশি $= (\frac{6}{6}-\frac{4}{8})x + (-\frac{2}{6}+\frac{4}{12})y + (-\frac{3}{12}+\frac{2}{8})z$

$= (1-\frac{1}{2})x + (-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})y + (-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})z = \frac{1}{2}x$

দ্বিতীয় রাশি $= (\frac{4}{12}-\frac{6}{6})x + (-\frac{3}{12}+\frac{6}{8})y + (-\frac{4}{8}+\frac{3}{6})z$

$= (\frac{1}{3}-1)x + (-\frac{1}{4}+\frac{3}{4})y + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})z = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$

এবং তৃতীয় রাশি $= (\frac{2}{8}-\frac{6}{12})x + (-\frac{4}{8}+\frac{3}{6})y + (-\frac{2}{6}+\frac{4}{12})z$

$= (\frac{1}{4}-\frac{1}{2})x + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})y + (-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})z = -\frac{1}{4}x$

$\therefore$ যোগফল $= -\frac{5}{12}x + \frac{1}{2}y$

[যোগফলে,

x এর সহগ $= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6-8-3}{12} = \frac{-5}{12}$,

y এর সহগ $= 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.]

উদা. 3. $x = 98$, $y = 79$, $a = 5$ এবং $b = 4$ হইলে,

$\frac{3}{7}x^3 + \frac{5}{11}y^5 - 20a^2 + \frac{49}{2}b^3$, $17a^2 - \frac{27}{2}b^3 - \frac{23}{7}x^3$,

$-\frac{y^5}{11} + \frac{3}{2}b^3 - 3a^2$ এবং $-\frac{23}{2}b^3 - \frac{4}{11}y^5 + 7a^2 + \frac{20}{7}x^3$ এর সমষ্টির মান নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে, রাশিগুলির যোগফল হইতেই নির্ণেয় মান অতি সহজে পাওয়া যায়।

প্রথম রাশি $= \frac{3}{7}x^3 + \frac{5}{11}y^5 - 20a^2 + \frac{49}{2}b^3$

দ্বিতীয় রাশি $= -\frac{23}{7}x^3 + 17a^2 - \frac{27}{2}b^3$

তৃতীয় রাশি $= -\frac{1}{11}y^5 - 3a^2 + \frac{3}{2}b^3$

চতুর্থ রাশি $= \frac{20}{7}x^3 - \frac{4}{11}y^5 + 7a^2 - \frac{23}{2}b^3$

$\therefore$ যোগফল $= a^2 + b^3$

$= 5^2 + 4^3 = 5 \times 5 + 4 \times 4 \times 4 = 25 + 64 = 89$.

[যোগফলে,

x^3 এর সহগ $= \frac{3}{7} - \frac{23}{7} + 0 + \frac{20}{7} = \frac{3-23+0+20}{7} = \frac{0}{7} = 0$,

y^5 এর সহগ $= \frac{5}{11} + 0 - \frac{1}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5+0-1-4}{11} = \frac{0}{11} = 0$,

a^2 এর সহগ $= -20 + 17 - 3 + 7 = 24 - 23 = 1$,

b^3 এর সহগ $= \frac{49}{2} - \frac{27}{2} + \frac{3}{2} - \frac{23}{2} = \frac{49-27+3-23}{2} = \frac{52-50}{2} = \frac{2}{2} = 1$.]

74. আক্ষরিক সহগবিশিষ্ট মিশ্ররাশির যোগফল নির্ণয়ঃ সহগগুলি কেবলমাত্র অঙ্ক না হইলে, উহাদিগকে আক্ষরিক সহগ (literal co-efficient) বলা হয়। যথা, ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... প্রভৃতিতে x এর সহগ যথাক্রমে a, $6b$, $(c+d-e)$,... বলিয়া, উহাদের প্রত্যেককেই আক্ষরিক সহগ বলে।

x এর সম্পর্কে ধরিলে, ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... প্রভৃতি পদগুলি কেবলমাত্র উহাদের সহগুতেই বিভিন্ন ; এইরূপে ধরিয়া ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... পদগুলিকেও সদৃশপদ (like terms) বলা যায়।

ax এবং bx, x-সংযুক্ত দুইটি সদৃশপদ হইলে, স্পষ্টতঃই যোজ্যদ্বয়ের **সদৃশ।**

উহাদের যোগফল $= ax + bx = (a+b)x$.

অতএব, **আক্ষরিক সহগবিশিষ্ট** দুইটি সদৃশপদের যোগফল ও একটি সদৃশপদ, এবং যোগফলের আক্ষরিক সহগ, পদদ্বয়ের আক্ষরিক সহগ দুইটির সমষ্টির সমান। 47 নিয়মের 3 অনুসিদ্ধান্ত হইতে বুঝা যায় যে, যোগের উপরোক্ত নিয়মটি দুই এর অধিক পদের বেলায়ও খাটিবে।

সুতরাং, সহগগুলি সাংখ্যই হউক বা আক্ষরিকই হউক, সদৃশপদসমূহের যোগের নিয়ম উভয়ক্ষেত্রেই এক।

ইহা হইতেই বুঝা যায় যে, মিশ্ররাশিসমূহের যোগের নিয়ম, উভয়প্রকার সহগের ক্ষেত্রেই, এক থাকিবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিদ্বারা যোগের উপরোক্ত নিয়মটি উত্তমরূপে বুঝা যাইবে।

উদা. 1. যোগ কর :

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z,\ ax+by+cz \text{ এবং } x+y+z.$$

মিশ্ররাশি তিনটিকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপে সাজাও, যেন উহাদের অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে ; সর্ব্বনিম্নটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

প্রথম রাশি $=(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$

দ্বিতীয় রাশি $= \quad ax+ \quad by+ \quad cz$

তৃতীয় রাশি $= \quad x+ \quad y+ \quad z$

অতএব, যোগফল $=(a+b+c+1)x+(a+b+c+1)y+(a+b+c+1)z$

[যোগফলে,

x এর সহগ $=(b+c)+a+1=a+b+c+1,$

y এর সহগ $=(c+a)+b+1=a+b+c+1,$

z এর সহগ $=(a+b)+c+1=a+b+c+1.$]

উদা. 2. যোগ কর : $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z,\ (b-c)y+(a-b)x+(c-a)z$ এবং $(b-c)z+(c-a)x+(a-b)y.$

x, y ও z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল নির্ণয় করা যাইবে। যথা,

প্রথম রাশি $=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

দ্বিতীয় রাশি $=(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z$

তৃতীয় রাশি $=(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z$

অতএব, নির্ণেয় যোগফল $=0.$

[যোগফলে,

x এর সহগ $= (b-c)+(c-a)+(a-b) = b-c+c-a+a-b = 0.$

তদ্রূপ, y এবং z এর সহগদ্বয়ও প্রত্যেকে 0.]

উদা. 3. $(ax-by)+(bx-cz)$, $(ay-bx)+(by-cz)$ এবং $(cz-ax)+(cz-by)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

x, y এবং z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই পূর্ব্ব-প্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

$$\begin{aligned}
\text{প্রথম রাশি} &= ax+bx-by-cz = (a+b)x - by - cz\\
\text{দ্বিতীয় রাশি} &= -bx+ay+by-cz = -bx+(a+b)y - cz\\
\text{তৃতীয় রাশি} &= -ax-by+2cz = -ax - by+2cz\\
\hline
\text{অতএব, যোগফল} &= (a-b)y
\end{aligned}$$

[যোগফলে,

x এর সহগ $= (a+b)-b-a = a+b-b-a = 0,$

y এর সহগ $= -b+(a+b)-b = -b+a+b-b = a-b,$

z এর সহগ $= -c-c+2c = 0.$]

টীকা 1. বন্ধনীসংযুক্ত একটি মিশ্ররাশিকে সদৃশ মিশ্ররাশির সহিত (with like compound expressions) যোগ করিতে হইলে, বন্ধনী অপসারণ না করিয়া যোগ করাই সুবিধাজনক (উদা. 2 দেখ)।

টীকা 2. আবশ্যক হইলে উদা. 3 এ প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী, যোজ্যরাশিসমূহকে 'পদসংযোগ প্রণালী (process of collecting terms)" মতে সরল করিয়া লওয়া উচিত।

উদা. 4. $(a^2+b^2)x+(b^2+c^2)y+(c^2+a^2)z$, $(b^2+c^2)m+(c^2+a^2)n$, $(c^2+a^2)p+(a^2+b^2)q$ এবং $(a^2+b^2)j+(b^2+c^2)k$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

উপরোক্ত রাশিগুলি (b^2+c^2), (c^2+a^2) এবং (a^2+b^2) এর সম্পর্কে সদৃশপদ-বিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ব্ববর্তী নিয়মানুযায়ী যোগফল পাওয়া যাইবে।

$$\begin{aligned}
\text{প্রথম রাশি} &= x(a^2+b^2)+y(b^2+c^2)+z(c^2+a^2)\\
\text{দ্বিতীয় রাশি} &= m(b^2+c^2)+n(c^2+a^2)\\
\text{তৃতীয় রাশি} &= q(a^2+b^2) + p(c^2+a^2)\\
\text{চতুর্থ রাশি} &= j(a^2+b^2)+k(b^2+c^2)
\end{aligned}$$

অতএব, যোগফল

$$=(x+q+j)(a^2+b^2)+(y+m+k)(b^2+c^2)+(z+n+p)(c^2+a^2).$$

[যোগফলে,

(a^2+b^2) এর সহগ $= x+0+q+j = x+q+j$,

(b^2+c^2) এর সহগ $= y+m+0+k = y+m+k$,

এবং (c^2+a^2) এর সহগ $= z+n+p+0 = z+n+p$.]

প্রশ্নমালা 35

যোগ কর :

1. $2x^2-5xy+y^2$, $4y^2-7x^2-5x+2y$, $3xy-5+y-6y^2$ এবং $3-4y+3x$.

2. $abc+a^2b-b^2c^2$, $5a^2b-12b^2c^2-3abc$, $8b^2c^2-4a^2b+2abc$ এবং $2a^2b+5b^2c^2$.

3. $m^3n^2-3mnp+2m^2n^3+6m^2n^2$, $7mnp-10m^2n^2+5m^3n^2-m^2n^3$, $2m^2n^2-5mnp+3m^2n^3$ এবং $-7m^3n^2+m^2n^2-4m^2n^3$.

4. $12a^3b^2x-29b^3x^2a+37x^3a^2b+45a^2b^2x^2$, $25b^3x^2a-16a^2b^2x^2-18a^3b^2x-5x^3a^2b$, $32a^2b^2x^2-23x^3a^2b+20a^3b^2x-28b^3x^2a$ এবং $-9x^3a^2b-14a^3b^2x-60a^2b^2x^2+32b^3x^2a$.

5. $-15a^4b^4c^4+7c^4a^3b^5-24b^4c^3a^5+27a^4b^3c^5$, $19c^4a^3b^5-15a^4b^3c^5+23a^4b^4c^4-8b^4c^3a^5$, $29b^4c^3a^5+11a^4b^4c^4-9a^4b^3c^5-16c^4a^3b^5$ এবং $-3a^4b^3c^5-10c^4a^3b^5+3b^4c^3a^5-18a^4b^4c^4$.

6. $25a^3b^3-8b^3c^3-23c^3a^3+19a^2b^2c^2$, $16c^3a^3-14a^2b^2c^2-19a^3b^3-12b^3c^3$, $27a^2b^2c^2+13a^3b^3+17c^3a^3-20b^3c^3$, $29b^3c^3-6a^2b^2c^2-21a^3b^3-13c^3a^3$ এবং $10b^3c^3+3a^3b^3+4c^3a^3-27a^2b^2c^2$.

7. $5a^3-18b^3-53c^3-25abc$, $38c^3-37a^3-7abc+29b^3$, $26abc-17c^3+11b^3+43a^3$, $13b^3-18abc+4a^3+21c^3$ এবং $-14a^3+12c^3+21abc-34b^3$.

8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}$, $\frac{3x}{4}+\frac{2y}{3}+\frac{3z}{5}$ এবং $\frac{3x}{4}+y+\frac{6z}{5}$.

9. $\frac{3x}{5}+\frac{4y}{7}+\frac{10z}{11}$, $\frac{2y}{7}+\frac{4z}{11}+\frac{x}{5}$ এবং $\frac{8z}{11}+\frac{6x}{5}+\frac{8y}{7}$.

10. $\frac{4x^2y}{15}+\frac{4y^2z}{13}+\frac{5z^2x}{17}$, $\frac{7y^2z}{13}+\frac{6z^2x}{17}+\frac{7x^2y}{15}$ এবং $\frac{6z^2x}{17}+\frac{4x^2y}{15}+\frac{2y^2z}{13}$.

11. $\frac{7a^2b}{19}+\frac{9b^2c}{17}+\frac{11ca^2}{21}+\frac{13ab^2}{35}$, $\frac{8b^2c}{17}+\frac{10c^2a}{21}+\frac{12a^2b}{19}+\frac{17bc^2}{35}$ এবং $\frac{22ab^2}{35}+\frac{18bc^2}{35}+\frac{10ca^2}{21}+\frac{11ac^2}{21}$.

12. $\frac{2abc^2}{3}+\frac{3}{4}bca^2+\frac{4}{7}b^2d$, $\frac{5}{9}cab^2+\frac{1}{3}abc^2+\frac{2}{11}a^2d$, $\frac{1}{4}bca^2+\frac{4}{13}c^2d+\frac{4}{9}cab^2$ এবং $\frac{9}{11}a^2d+\frac{3}{7}b^2d+\frac{9}{13}c^2d$.

13. $\frac{x-2y}{2}+\frac{2y-3z}{6}+\frac{3z-4x}{12}$, $\frac{2x-3y}{6}+\frac{3y-4z}{12}+\frac{z-2x}{2}$ এবং $\frac{3x-4y}{12}+\frac{y-2z}{2}+\frac{2z-3x}{6}$.

14. $\frac{2x-3y}{6}+\frac{3y-5z}{15}+\frac{5z-7x}{35}$, $\frac{3x-5y}{15}+\frac{5y-7z}{35}+\frac{2z-3x}{6}$ এবং $\frac{5x-7y}{35}+\frac{2y-3z}{6}+\frac{3z-5x}{15}$.

15. $\frac{2b-3c}{bc}+\frac{3c-4a}{ca}+\frac{4a-2b}{ab}$, $\frac{2c-3a}{ca}+\frac{3a-4b}{ab}+\frac{4b-2c}{bc}$ এবং $\frac{2a-3b}{ab}+\frac{3b-4c}{bc}+\frac{4c-2a}{ca}$.

16. $\frac{bx-3ay}{ab}+\frac{2by-4az}{ab}+\frac{3bz-ax}{ab}$, $\frac{cx-4by}{bc}+\frac{3cy-5bz}{bc}+\frac{4cz-bx}{bc}$ এবং $\frac{ax-2cy}{ca}+\frac{4ay-3cz}{ca}+\frac{5az-cx}{ca}$.

17. $\frac{cy-ax}{caxy}+\frac{az-by}{abyz}+\frac{bx-cz}{bczx}$, $\frac{ay-bx}{abxy}+\frac{bz-cy}{bcyz}+\frac{cx-az}{cazx}$ এবং $\frac{by-cx}{bcxy}+\frac{cz-ay}{cayz}+\frac{ax-bz}{abzx}$.

$a=5$, $b=4$, $x=8$, $y=7$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

18. $(46a^4+38b^4-87abx^2-105y^4)+(47abx^2+85y^4-56a^4-58b^4)+(57y^4+75b^4+23a^4+63abx^2)+(-33b^4+8y^4-27abx^2-39a^4)+(26a^4-45y^4-22b^4+5abx^2)$.

19. $(35xy^4 + 207ab^4 - 98bx^4 - 62ya^4 - 83abx^2y) + (68bx^4 + 102ya^4 - 65xy^4 - 87ab^4 + 53abx^2y) + (26abx^2y - 75ab^4 - 25ya^4 + 43bx^4 + 53xy^4) + (28ya^4 - 29xy^4 - 65abx^2y + 45ab^4 + 26bx^4) + (-89ab^4 - 43ya^4 + 69abx^2y + 6xy^4 - 39bx^4)$.

20. $(57a^4bx + 25b^4xy - 143x^4ya + 37y^4ab - 253a^2b^2x^2) + (63x^4ya - 92y^4ab - 63a^4bx + 73a^2b^2x^2 - 85b^4xy) + (35y^4ab + 132b^4xy + 82a^2b^2x^2 + 36x^4ya + 96a^4bx) + (-50a^2b^2x^2 - 78a^4bx + 27y^4ab - 17x^4ya - 52b^4xy) + (61x^4ya - 20b^4xy + 148a^2b^2x^2 - 7y^4ab - 12a^4bx)$.

যোগ কর :

21. $(a^2 + b^2)(m + n) + (a^2 - b^2)(p + q) + c^2l$, $(a^2 - b^2)(m + n) + (a^2 + b^2)(p + q) + c^2m$ এবং $nc^2 + l(a^2 + b^2) + k(a^2 - b^2)$.

22. $(x + y)^2a + (y + z)^2b + (z + x)^2c$, $(x - y)^2a + (y - z)^2b + (z - x)^2c$ এবং $2(x^2 - y^2)a + 2(y^2 - z^2)b + 2(z^2 - x^2)c$.

23. $ab(a - b)$, $bc(b - c)$, $ca(c - a)$ এবং $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$.

উহ্য অংশ নির্ণয় কর :

24. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$
$= \{ \quad\quad \} - \{(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2\}$.

25. $(b + c)x^2 + (c + a)y^2 + (a + b)z^2 = \{ \quad\quad \} - (ax^2 + by^2 + cz^2)$.

2. বিয়োগ

75. 35 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে যে, 'কোন একটি সরলরাশি a কে বিয়োগ করা' অথবা '$-a$ সরলরাশিটিকে যোগ করা', উভয়ই এক। যথা, $x - a = x + (-a)$. তদ্রূপ, 'কোন একটি মিশ্ররাশিকে বিয়োগ করা' অথবা 'ঐ রাশির অন্তর্গত পদসমূহের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া যোগ করা' উভয়ই এক। একটি মিশ্ররাশিকে অপর একটি মিশ্ররাশি হইতে বিয়োগ করার প্রণালী 38 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। এ পর্য্যন্ত উক্ত নিয়ম সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রয়োগ করা হইয়াছে; বর্ত্তমানে উহা জটিলতর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হইবে।

উদা. 1. $(b + c)y + (c + a)z + (a + b)x$ হইতে $ax + by + cz$ বিয়োগ কর।

x, y ও z এর সম্পর্কে সদৃশপদগুলি সাজাইয়া 38 নিয়মে বর্ণিত প্রণালী অনুসারে বিয়োগফল নির্ণয় করা হইবে।

বিয়োজন $= (a+b)x + (b+c)y + (c+a)z$
বিয়োজ্য $= \quad ax + \quad by + \quad cz$
বিয়োগফল $= \quad bx + \quad cy + \quad az$

[বিয়োগফলে,

x এর সহগ $= a + b - a = b$. তদ্রূপ, y ও z সহগদ্বয় যথাক্রমে c ও a.]

উদা. 2. $(b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy$ হইতে
$(b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $= (b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy$
বিয়োজ্য $= (b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy$
বিয়োগফল $= \quad 4bcyz + \quad 4cazx + \quad 4abxy$

[বিয়োগফলে,

yz এর সহগ $= (b+c)^2 - (b-c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
$= b^2 + 2bc + c^2 - b^2 + 2bc - c^2 = 4bc.$

তদ্রূপ, zx এবং xy এর সহগদ্বয় যথাক্রমে $4ca$ এবং $4ab$.]

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমতাটির শূন্যস্থান পূরণ কর :

$(2a+3b)x + (3b+4c)y + (4c+2a)z$
$= (a+b)x + (b+c)y + (c+a)z + \{ \qquad \}.$

স্পষ্টতঃই, $(2a+3b)x + (3b+4c)y + (4c+2a)z$ হইতে $(a+b)x + (b+c)y + (c+a)z$ বিয়োগ করিলে উহ্য রাশিটি পাওয়া যাইবে। প্রথম ও দ্বিতীয় উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুসারে বিয়োগ করিয়া বিয়োগফল $(a+2b)x + (2b+3c)y + (3c+a)z$ পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. $3\frac{3}{4}ax + 2\frac{4}{9}by + 6\frac{83}{90}z$ হইতে $2.5ax - 3.\dot{7}by - 8.3\dot{2}z$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $= 3\frac{3}{4}ax \quad + 2\frac{4}{9}by \quad + 6\frac{83}{90}z$
বিয়োজ্য $= 2.5ax - 3.\dot{7}by \quad - 8.3\dot{2}z$
বিয়োগফল $= \frac{5}{4}ax \quad + \frac{56}{9}by \quad + \frac{686}{45}z$

[বিয়োগফলে,

ax এর সহগ $= 3\frac{3}{4} - 2.5 = \frac{15}{4} - \frac{5}{2} = \frac{15-10}{4} = \frac{5}{4}$;

by এর সহগ $= 2\frac{4}{9} - (-3.\dot{7}) = 2\frac{4}{9} + 3.\dot{7} = \frac{22}{9} + \frac{34}{9} = \frac{56}{9}$;

এবং z এর সহগ $= 6\frac{83}{90} - (-8.3\dot{2}) = 6\frac{83}{90} + 8.3\dot{2} = \frac{623}{90} + \frac{749}{90}$
$= \frac{623+749}{90} = \frac{1372}{90} = \frac{686}{45}$.]

টীকা। যোগের মত বিয়োগেও ভগ্নাংশ-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মানুসারে সরল করিতে হইবে।

[বন্ধনীসংযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহের বিয়োগফল নির্ণয়কালে বন্ধনী অপসারণ না করাই কর্তব্য (1-3 উদাহরণ তিনটি দেখ)।]

প্রশ্নমালা 36

বিয়োগ কর :

1. $3x^5-5x^4y+2x^3y^2-7x^2y^3+6y^4$ হইতে $-7x^5+6x^4y-8x^3y^2-13x^2y^3+9y^4$.

2. $5m^3nx-17n^3xm+26x^3mn-13m^2n^2x-19n^2x^2m$ হইতে $3m^3nx-10n^3xm+14x^3mn-20m^2n^2x-27n^2x^2m$.

3. $48x^6-31x^5y-7x^4y^2-39x^3y^3-41x^2y^4+65xy^5-53y^6$ হইতে $37x^6-28x^5y+43x^4y^2-54x^3y^3-67x^2y^4+84xy^5-93y^6$.

4. $3ax^4-5a^2x^3+6yzbc^2-7y^2zbc+8yz^2bc$ হইতে $-2yzbc^2+4yz^2bc-2ax^4-9y^2zbc+3a^2x^3$.

5. $25-16x^3y^5z-17xy^3z^5+21x^3z^5y-6x^2y^2z^2+8xyz^4$ হইতে $19x^3z^5y-15x^3y^5z+27+11xyz^4-12x^2y^2z^2-19xy^3z^5$.

6. $29x^4y^3z^2-37x^3y^4z^2+54x^2y^3z^4-45x^3y^2z^4-67x^4y^2z^3+89x^2y^4z^3$ হইতে $43x^3y^4z^2-23x^3y^2z^4+25x^4y^3z^2-66x^2y^4z^3+26x^2y^3z^4+35x^4y^2z^3$.

7. $41x^3y^4z^5-87x^3y^5z^4-28x^4y^5z^3+63x^4y^3z^5-55x^5y^3z^4+37x^5y^4z^3$ হইতে $-29x^4y^3z^5+75x^5y^4z^3+13x^3y^5z^4+53x^3y^4z^5-94x^5y^3z^4-86x^4y^5z^3$.

8. $3x^2-5xy+6y^2+7yz$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-x^2-y^2-yz$ হইবে ?

9. $-5x^3+13x^2y^2-a^2bx+5bxy^2+7xyab$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x^3+x^2y^2+a^2bx-2bxy^2-2xyab$ হইবে ?

10. $5x^4-6x^3y+7x^2y^2-8xy^3-19y^4$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $3x^4+5x^2y^2-12y^4$ হইবে ?

11. $-5x^5-3x^4y+6x^3y^2+17x^2y^3+13xy^4-21y^5$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-7x^5-4x^3y^2+13x^2y^3+29y^5$ হইবে ?

12. $2a^2+5ab-6b^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল a^2+2b^2 হইবে ?

13. $5x^2 - 6xy + 4y^2 - 8x + 10y + 15$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6$ হইবে ?

14. $3a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 8b^3$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $a^3 - 2ab^2 + 7b^3$ হইবে ?

15. $-8x^3y + 4x^2y^2 - 11xy^3 + 12x^2 - 13y + 27$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $4x^3y - 3x^2y^2 - 11xy^3 + 20x^2 - 30y + 56$ হইবে ?

16. কোন্ রাশিমালা হইতে $3a^2 - 7ab - 8bc + 9b^2$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $2a^2 + 3ab + 3bc + 2b^2$ হইবে ?

17. কোন্ রাশিমালা হইতে $-3x^3 + 5y^2 - 7xy + 8x - 9$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $x^3 - 8y^2 + 2xy - 11x + 7$ হইবে ?

18. কোন্ রাশিমালা হইতে $-7a^3 - 8b^2c - 13ac^2 + 3b^3$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $4a^3 - 3b^2c + 7ac^2 - 8b^3$ হইবে ?

19. কোন্ রাশিমালা হইতে $21x^3 - 37xy^2 + 42y^3 - 18x^2 + 19xy - 39$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $-25x^3 + 15xy^2 - 87y^3 + 7x^2 - 43xy + 24$ হইবে ?

বিয়োগ কর :

20. $\frac{13}{24}x + \frac{213}{168}y + \frac{201}{19}z$ হইতে $\frac{1}{12}x + \frac{97}{83}y + \frac{107}{57}z.$

21. $-\frac{1}{20}ax + \frac{3}{7}y + \cdot\dot{8}mz$ হইতে $-\cdot35ax + \frac{13}{56}y + \cdot1\dot{7}mz.$

22. $32\cdot39c^2by + 2\cdot37a^2cx - 62\cdot73c^3z$ হইতে

$1\cdot17a^2cx + 2\cdot31c^2by - 63\cdot18c^3z.$

23. $3\cdot3lx + \frac{35}{44}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y - \frac{3}{7}nz - \frac{8}{29}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z - 2\cdot5my - \frac{65}{38}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x$ হইতে

$\frac{32}{19}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x + \frac{25}{22}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y + \frac{21}{29}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z + 2\cdot3lx + 3\cdot5my + \frac{32}{7}nz.$

24. নিম্নলিখিত সমতাগুলির উহ্য অংশ নির্ণয় কর :

(i) $3\cdot2x + 5\cdot3y + 5\cdot4z - (\qquad\qquad) = 2x + 3y + 6z$;

(ii) $17x + 23y + \frac{121}{21}z = 52x - 1\cdot7y + \frac{40}{7}z - (\qquad\qquad)$;

(iii) $1\cdot2a + 15\cdot52l^2 + 16m^2 + 14p$
$= (\qquad\qquad) - (2\cdot2a + 3\cdot52l^2 + 4m^2 + 16p).$

বিয়োগ কর :

25. $bc(b+c) + ca(c+a)ab(a+b)$ হইতে

$bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b).$

26. $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$ হইতে

$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$

27. $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ হইতে

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

28. $(1+a)^2x+(1+b)^2y+(1+c)^2z$ হইতে

$$(1+a+a^2)x+(1+b+b^2)y+(1+c+c^2)z.$$

29. এক ব্যক্তি এক বৎসরে মাসিক $(ax+by+cz)$ সংখ্যক টাকা উপার্জ্জন করিয়া সেই বৎসরেই $(10ax+13cz)$ সংখ্যক টাকা খরচ করিলেন। বৎসরের শেষে তাঁহার হাতে কত টাকা থাকিবে ?

30. $(50x+71y+18z)$ সংখ্যক ভেড়া হইতে $(13x+12y)$ সংখ্যক এবং $(15y+8z)$ সংখ্যক ভেড়া বিক্রীত হইল এবং $(3z+23x)$ সংখ্যক ভেড়া মরিয়া গেল। কতগুলি ভেড়া অবশিষ্ট রহিল ?

নবম অধ্যায়

জটিল গুণন

(Harder Multiplication)

76. তৃতীয় অধ্যায়ে গুণনের নিম্নলিখিত নিয়মগুলি ব্যাখ্যা করা হইয়াছে :

(1) $a\times b=b\times a$; [নিয়ম 42]

$abc=bca=cab,$ ইত্যাদি ; [নিয়ম 43]

অর্থাৎ, উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমেই লওয়া হউক না কেন, গুণফল সকল ক্ষেত্রেই এক থাকে ;

ইহাকে গুণনের **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) বলে।

(2) $(ab)\times c=a\times(bc)=b\times(ac)=a\times b\times c$; [নিয়ম 43]

অর্থাৎ, গুণফলের উৎপাদকগুলিকে যে কোন রকমে সঙ্ঘবদ্ধ (grouped together) করা যায়।

ইহাকে গুণনের **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) বলে।

(3) $a(b+c)=ab+ac.$ [নিয়ম 47]

ইহাকে গুণনের **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive Law) বলে।

(4) m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি (positive integer) হইলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

ইহাকে গুণনের **সূচক নিয়ম** (Index Law) বলে।

বর্তমানে, মিশ্ররাশির (compound expression এর) গুণনের নিয়ম এবং জটিল গুণনের উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

77. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

$c+d$ এর পরিবর্তে x ধরিয়া,

$$(a+b)(c+d)=(a+b)x=x(a+b)=xa+xb \quad \text{[নিয়ম 47]}$$
$$=ax+bx=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd.$$

অনুসি.। যেহেতু, $a-b=a+(-b)$ এবং $c-d=c+(-d)$,

অতএব, $(a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$
$$=ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)$$
$$=ac-ad-bc+bd.$$

78. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b+c+d+\ldots)(m+n+p+q+\ldots)$$
$$=a(m+n+p+q+\ldots)+b(m+n+p+q+\ldots)$$
$$+c(m+n+p+q+\ldots)+d(m+n+p+q+\ldots)+\ldots \text{ ইত্যাদি}$$

$m+n+p+q+\cdots$ এর পরিবর্তে x লিখিয়া,

$$(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots)=(a+b+c+d+\cdots)x$$
$$=ax+bx+cx+dx+\cdots$$
$$=a(m+n+p+q+\cdots)+b(m+n+p+q+\cdots)+c(m+n+p+q+\cdots)$$
$$+d(m+n+p+q+\ldots)+\ldots\ldots \text{ইত্যাদি।}$$

এইরূপে, দুইটি বহুপদরাশির (multinomial এর) গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, রাশিদ্বয়ের যে কোনটির প্রত্যেকটি পদ-(term) কে অপরটির প্রত্যেকটি পদ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইতে হয়।

উদা. 1. $2a+3b$ কে $4a+5b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(4a+5b)(2a+3b)=(4a)(2a)+(4a)(3b)+(5b)(2a)+(5b)(3b)$$
$$=8a^2+12ab+10ab+15b^2$$
$$=8a^2+22ab+15b^2.$$

উদা. 2. $3x-7y$ কে $2x-5y$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2x-5y)(3x-7y)=(2x)(3x)+(2x)(-7y)+(-5y)(3x)+(-5y)(-7y)$$
$$=6x^2-14xy-15xy+35y^2$$
$$=6x^2-29xy+35y^2.$$

প্রশ্নমালা 37

গুণ কর :

1. $2a+3b$ কে $a+b$ দ্বারা।
2. $2m-3n$ কে $m-n$ দ্বারা।
3. $a+b+c$ কে $a+b+c$ দ্বারা।
4. $a-b+c$ কে $a-b+c$ দ্বারা।
5. $a-b-c$ কে $a-b-c$ দ্বারা।
6. $a-2b-3c$ কে $2a-b-c$ দ্বারা।
7. $2x-3y-4z$ কে $x-y-z$ দ্বারা।
8. $-5x+2a-3b$ কে $-x-a+b$ দ্বারা।
9. $x^2+y^2+z^2$ কে $x-y-z$ দ্বারা।
10. $xy+yz+zx$ কে $xy-yz-zx$ দ্বারা।

79. কোন রাশিমালাকে তদন্তর্গত কোন একটি অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম (descending order) বা ঊর্দ্ধক্রম (ascending order) অনুসারে সাজান : রাশিমালার পদসমূহ, উহাদের অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট হইলে, যদি ঐ পদগুলিকে এরূপে সাজান যায় যে, নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম, তন্নিম্ন-শক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম পদের ডা'নদিকে, তন্নিম্নশক্তিবিশিষ্ট পদটি দ্বিতীয় পদের ডা'নদিকে, ইত্যাদি, এবং ঐ অক্ষরবিবর্জ্জিত পদটি অর্থাৎ ধ্রুবকটি (constant) সর্ব্বশেষে লিখিত হয়, তাহা হইলে উক্ত রাশিমালাকে নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির **অধঃক্রম** অনুসারে সাজান হইল, বলা হয়। ইহার ঠিক বিপরীতভাবে সাজাইলে (অর্থাৎ প্রথমে ধ্রুবকটি, তৎপরে সর্ব্বনিম্নশক্তিবিশিষ্ট পদটি, ইত্যাদি, এবং সর্ব্বশেষে সর্ব্বোচ্চ-শক্তিবিশিষ্ট পদটি লিখিলে রাশিমালাকে নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির **ঊর্দ্ধক্রম** অনুসারে সাজান হইল, বলা হয়। যথা, $a^5x^3+3a^4xy-5a^3x^6y^2+4a^2x^4y^3-2ax^2y^4+x^5y^5$ রাশিমালাটি a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে, অথবা y এর শক্তির ঊর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজান রহিয়াছে। কিন্তু ইহাকে $-5a^3x^6y^2+x^5y^5+4a^2x^4y^3+a^5x^3-2ax^2y^4+3a^4xy$ এইরূপে লিখিলে, রাশিমালাটিকে x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে, বলিতে হইবে।

80. কোন রাশিমালাকে অন্য একটি রাশিমালা দ্বারা গুণ করিতে হইলে, গুণ্য-রাশি এবং গুণকরাশির অন্তর্গত কোন একটি সাধারণ অক্ষরের শক্তির, হয় ঊর্দ্ধক্রম, না

হয় অধঃক্রম অনুসারে উভয়কেই সাজাইয়া নিম্নলিখিত উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হয়।

উদা. 1. a^2-b^2-ab কে $ab-b^2+a^2$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $= a^2 - ab - b^2$

গুণক $= a^2 + ab - b^2$

a^2 দ্বারা গুণন $= a^4 - a^3b - a^2b^2$

$+ab$ দ্বারা গুণন $= \quad + a^3b - a^2b^2 - ab^3$

$-b^2$ দ্বারা গুণন $= \quad\quad - a^2b^2 + ab^3 + b^4$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $= a^4 \quad - 3a^2b^2 \quad + b^4$

টীকা। উপরোক্ত উদাহরণের প্রক্রিয়া-বিশ্লেষণ :

গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ্যের নীচে গুণককে লিখা হইয়াছে এবং গুণকের নীচে একটি রেখা টানা হইয়াছে ; তৎপরে বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া, গুণকের প্রত্যেকটি পদ দ্বারা গুণ্যকে গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে সারি করিয়া একটির নীচে একটি এরূপে লিখা হইয়াছে যে, বিভিন্ন সারির সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে। সর্ব্বনিম্ন সারির নীচে একটি রেখা টানিয়া বিভিন্ন স্তম্ভের বীজগণিতীয় যোগফলগুলি উহার নীচে লিখিয়াই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গিয়াছে।

উদা. 2. $2a^2-3x^2-5ax$ কে $-3x^2+2a^2+5ax$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই x এর শক্তির ঊর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজাইলে,

গুণ্য $= 2a^2 - 5ax - 3x^2$

গুণক $= 2a^2 + 5ax - 3x^2$

$2a^2$ দ্বারা গুণন $= 4a^4 - 10a^3x - 6a^2x^2$

$+5ax$ দ্বারা গুণন $= \quad + 10a^3x - 25a^2x^2 - 15ax^3$

$-3x^2$ দ্বারা গুণন $= \quad\quad - 6a^2x^2 + 15ax^3 + 9x^4$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 4a^4 \quad - 37a^2x^2 \quad + 9x^4$

1. 3. $2a^3b - 5ab^3 - a^4 + 3a^2b^2$ কে $2a^4 - 3a^3b + 4ab^3 - 5a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

[গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ কর।]

$$
\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য :} & -a^4+2a^3b+3a^2b^2-5ab^3 \\
\text{গুণক :} & 2a^4-3a^3b-5a^2b^2+4ab^3 \\
\hline
& -2a^8+4a^7b+6a^6b^2-10a^5b^3 \\
& \qquad +3a^7b-6a^6b^2-9a^5b^3+15a^4b^4 \\
& \qquad\qquad +5a^6b^2-10a^5b^3-15a^4b^4+25a^3b^5 \\
& \qquad\qquad\qquad -4a^5b^3+8a^4b^4+12a^3b^5-20a^2b^6 \\
\hline
\text{নির্ণেয় গুণফল} = & -2a^8+7a^7b+5a^6b^2-33a^5b^3+8a^4b^4+37a^3b^5-20a^2b^6
\end{array}
$$

টীকা। উপরোক্ত উদাহরণে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই চতুর্থমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি এবং গুণফলও অষ্টমমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি। তদ্রূপ দেখান যাইতে পারে যে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে গুণফলও সমমাত্র রাশি হইবে, এবং গুণফলের মান (degree of the product) রাশিদ্বয়ের মানের সমষ্টি হইবে। গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে, গুণফলের শুদ্ধি পরীক্ষা করার পক্ষে এই নিয়মটি অত্যাবশ্যক; কারণ, গুণফল সমমাত্র না হইলেই বুঝিতে হইবে যে গুণনে ভুল হইয়াছে।

উদা. 4. mx^2-nx-p কে x^2+px-1 দ্বারা কর।

$$
\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য} = & mx^2-nx-p \\
\text{গুণক} = & x^2+px-1 \\
\hline
& mx^4-nx^3-px^2 \\
& \qquad +pmx^3-pnx^2-p^2x \\
& \qquad\qquad -mx^2+nx+p \\
\hline
\text{গুণফল} = & mx^4-(n-pm)x^3-(p+pn+m)x^2+(n-p^2)x+p
\end{array}
$$

উদা. 5. $\frac{11}{5}ax^3+\frac{7}{19}b^2x^2y+3\cdot5cxy^2+1\cdot05g^2y^3$ কে $2lx^2+3\cdot5mxy+1\cdot5ny^2$ দ্বারা গুণ কর।

[**টীকা।** গুণ্য এবং গুণকে সাধারণ ও দশমিক এই উভয়বিধ ভগ্নাংশ-সহগই বর্ত্তমান থাকিলে, সকল ভগ্নাংশগুলিকেই একজাতীয় ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করাই সুবিধাজনক। বর্ত্তমানক্ষেত্রে, $\frac{7}{19}$ কে দশমিকে পরিবর্ত্তিত করিলে, দশমিক বিন্দুর পর অনেকগুলি অঙ্ক আসিবে বলিয়া সকল ভগ্নাংশগুলিকেই সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করা হইল।]

$$\text{গুণ্য} = \tfrac{11}{5}ax^3 + \tfrac{7}{9}b^2x^2y + \tfrac{7}{2}cxy^2 + \tfrac{21}{20}g^2y^3$$
$$\text{গুণক} = 2lx^2 + \tfrac{7}{2}mxy + \tfrac{3}{2}ny^2$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{22}{5}alx^5 + \tfrac{14}{9}b^2lx^4y + 7clx^3y^2 + \tfrac{21}{10}g^2lx^2y^3 \\
&\quad + \tfrac{77}{10}amx^4y + \tfrac{49}{18}b^2mx^3y^2 + \tfrac{49}{4}cmx^2y^3 + \tfrac{147}{40}g^2mxy^4 \\
&\quad\quad + \tfrac{33}{10}anx^3y^2 + \tfrac{21}{18}b^2nx^2y^3 + \tfrac{21}{4}cnxy^4 + \tfrac{63}{40}g^2ny^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{গুণফল} = &\tfrac{22}{5}alx^5 + (\tfrac{14}{9}b^2l + \tfrac{77}{10}am)x^4y + (7cl + \tfrac{49}{18}b^2m + \tfrac{33}{10}an)x^3y^2 \\
&+ (\tfrac{21}{10}g^2l + \tfrac{49}{4}cm + \tfrac{21}{18}b^2n)x^2y^3 + (\tfrac{147}{40}g^2m + \tfrac{21}{4}cn)xy^4 + \tfrac{63}{40}g^2ny^5
\end{aligned}$$

উদা. 6. গুণ কর : $a^2 - ab + b^2$, $a^2 + ab + b^2$ এবং $a^4 - a^4b^2 + b^4$.

(i)
$$\begin{array}{l}
a^2 - ab + b^2 \\
a^2 + ab + b^2 \\
\hline
a^4 - a^3b + a^2b^2 \\
\quad + a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\
\quad\quad + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
\hline
a^4 \quad + a^2b^2 \quad + b^4 \text{ ;}
\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{l}
a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
a^4 - a^2b^2 + b^4 \\
\hline
a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 \\
\quad - a^6b^2 - a^4b^4 - a^2b^6 \\
\quad\quad + a^4b^4 + a^2b^6 + b^8 \\
\hline
a^8 \quad + a^4b^4 \quad + b^8
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $= a^8 + a^4b^4 + b^8$.

টীকা। তিন বা তদধিক রাশির পর পর গুণনের ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ রাশিগুলির **ধারাবাহিক গুণফল** (continued product) বলে। কতকগুলি রাশির ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের যে কোন দুইটির গুণফলকে অন্য একটি দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকে আবার অপর একটি দ্বারা, ইত্যাদিক্রমে, পর পর গুণ করিয়া যাইতে হয়।

ধারাবাহিক গুণনে, গুণ্য রাশিগুলিকে সুবিধামত ক্রমানুসারে সাজাইয়া গুণ করিতে হয়।

81. 'সহগ বিচ্ছিন্ন করণ' প্রণালী (Method of detached co-efficients) : যদি গুণ্য এবং গুণক রাশিদ্বয়ের পদসমূহ একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট হয়, অথবা উভয়ই দুইটি অক্ষরের সমমাত্র রাশি হয়, তাহা হইলে পদগুলির আক্ষরিকাংশ হইতে সাংখ্য-সহগগুলিকে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থাপন করিয়া ঐ

সহগগুলি দ্বারাই গুণনক্রিয়া সংক্ষেপে ও সহজে সম্পন্ন করা যায়। রাশিদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সাধারণ অক্ষরটির কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্ত্তমান না থাকিলে, ঐ পদটির সহগ 0 বলিয়া ধরিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী সুস্পষ্টরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1. গুণ কর : x^2-4x+4 কে $x-2$ দ্বারা।

$$\begin{array}{rrrr} x^2 - & 4x & +4 & \\ x - & 2 & & \\ \hline 1 - & 4 & +4 & \\ & -2 & +8 & -8 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^3-6x^2+12x-8$.

উদা. 2. গুণ কর : $3x^3-2x+4$ কে $x+5$ দ্বারা।

$$\begin{array}{rrrrr} 3x^3 + & 0.x^2 & -2x & +4 & \\ x+5 & & & & \\ \hline 3 + & 0 & -2 & +4 & \\ & +15 & +0 & -10 & +20 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=3x^4+15x^3-2x^2-6x+20$.

প্রশ্নমালা 38

গুণ কর :

1. $25b^2+30ab+9a^2$ কে $3a-5b$ দ্বারা।
2. $2a-3b+4c$ কে $2a+3b-4c$ দ্বারা।
3. x^2-x+2 কে x^2+x+2 দ্বারা।
4. $a^2-2ab+b^2$ কে $a^2+2ab+b^2$ দ্বারা।
5. x^4+x^2+1 কে x^4-x^2+1 দ্বারা।
6. $y^3-x^2y^2+x^3$ কে $x^3+x^2y^2+y^3$ দ্বারা।
7. $m^4-m^2n^2+n^4$ কে m^2+n^2 দ্বারা।
8. $p^2q^2+p^4+q^4$ কে $-q^2+p^2$ দ্বারা।
9. $a^3+5ab^2-6a^2b$ কে $5b^2+a^2+6ab$ দ্বারা।
10. x^3-3x^2+3x-1 কে x^2+3x+1 দ্বারা।
11. $2ax^3+a^4+3a^2x^2+x^4+2a^3x$ কে a^2+x^2-2ax দ্বারা।
12. $a^3+3a^2b+b^3+3ab^2$ কে $3ab^2-b^3+a^3-3a^2b$ দ্বারা।
13. $x^2-11+x^4-4x+2x^3$ কে $3+x^2-2x$ দ্বারা।

14. $1+2x+x^4+2x^3+3x^2$ কে $1+x^2-2x$ দ্বারা।

15. $b^4+a^2b^2+a^3b+a^4+ab^3$ কে $a^2b^2-a^3b+b^4-ab^3+a^4$ দ্বারা।

16. $x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2$ কে $x+y+z$ দ্বারা।

17. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ কে $a+b+c$ দ্বারা।

18. $5a^2b+4b^3+2a^3-3ab^2$ কে $2ab^2-3a^2b+a^3-5b^3$ দ্বারা।

19. ax^2+bx-c কে $px-q$ দ্বারা। 20. mx^2-nx-r কে $nx-r$ দ্বারা।

21. ax^2-bx+c কে x^2-bx-c দ্বারা।

22. ax^3-bx^2+cx-d কে bx^2-cx+d দ্বারা।

23. $px^2-(q-r)x+s$ কে mx^2-nx-s দ্বারা।

24. $ax^2+2hxy+by^2$ কে $lx+my+n$ দ্বারা।

25. $l^2x^2+m^2xy+n^2y^2+2g^2x+2f^2y+c^2$ কে px^2+qx+r দ্বারা।

26. $\frac{7}{9}x^3+\frac{2}{5}x^2y+\frac{3}{5}xy^2+\frac{3}{7}y^3$ কে $\frac{9}{7}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{7}{3}y^2$ দ্বারা।

27. $\frac{3}{7}x^4+\frac{5}{7}x^3y+\frac{9}{7}x^2y^2+\frac{1}{7}xy^3+\frac{11}{7}y^4$ কে $\frac{7}{3}x^2+\frac{7}{11}y^2$ দ্বারা।

28. $1\cdot5x^5+2\cdot3x^9+1\cdot23x^4+3\cdot25x^2+5$ কে $\cdot27x^3+1\cdot39x+9$ দ্বারা।

29. $\cdot057a^3+1\cdot025a^2b+2\cdot021ab^2+2\cdot8b^3$ কে $7a^2+2ab+9b^2$ দ্বারা।

30. $2\cdot3x^3+3\cdot15x^2y+1\cdot17xy^2+2\cdot07y^3$ কে $lx^2+mxy+ny^2$ দ্বারা।

31. $\frac{5}{2}ax^3+\frac{7}{3}bx^2y+\frac{9}{4}cxy^2+2dy^3$ কে $\frac{2}{5}ax^2-\frac{3}{7}bxy+\frac{4}{3}cy^2$ দ্বারা।

32. $1\cdot5am^3-1\cdot2bm^2n+1\cdot3cmn^2-1\cdot6dn^3$ কে
$1\cdot5am^3+1\cdot2bm^2n+1\cdot3cmn^2+1\cdot6dn^3$ দ্বারা।

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

33. $2a+3b$, $2a-3b$ এবং $4a^2+9b^2$ এর।

34. $5ax+6by$, $5ax-6by$ এবং $25a^2x^2+36b^2y^2$ এর।

35. $x^8+x^4y^4+y^8$, x^2+y^2, $x+y$ এবং $x-y$ এর।

36. $x^2+3xy+5y^2$, $x^2-3xy+5y^2$ এবং $x^4-x^2y^2+25y^4$ এর।

37. $a^{12}x^{12}+a^6b^6x^6y^6+b^{12}y^{12}$, $a^4x^4+a^2b^2x^2y^2+b^4y^4$, $ax+by$ এবং $ax-by$ এর।

m ও n এর সকল মানের জন্যই, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ধরিয়া লইয়া, প্রমাণ কর যে :

38. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a$. $[a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a.]$ 39. $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = x$.

40. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a$. $[a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a.]$

41. $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$. $[(a^{\frac{1}{4}})^4 = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = a^1 = a;$
$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}.]$

42. $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.
43. $= \sqrt[4]{z^3}$.
44. $c^{\frac{3}{5}} \times c^{\frac{4}{5}} \times c^{\frac{8}{5}} = c^3$.

45. $y^2 \times y^{\frac{3}{2}} \times y^{\frac{7}{2}} = y^7$.
46. $x^{-2} \times x^5 = x^3$. [$x^{-2} \times x = x^{-2+5} = x^3$.]

47. $z^{\frac{3}{2}} \times z^{-\frac{1}{2}} = z$.
48. $a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$.

[$\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{-\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = a^{-3}$; $\therefore$ $a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$]

49. $b^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{b^{-5}}$.
50. $x^{-\frac{5}{3}} \times x^{-\frac{4}{3}} = x^{-3}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল লিখ :

51. $-3x^{\frac{1}{2}}$ এবং $2x^{\frac{3}{2}}$.
52. $5y^{\frac{3}{2}}$ এবং $-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}$.
53. $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ এবং $3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.
54. $-5xy^{\frac{3}{4}}$ এবং $-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$.
55. $4a^{-2}b^3$ এবং $-\frac{3}{4}a^3b^{-5}$.
56. $\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}}y^3$ এবং $-\frac{5}{3}a^{\frac{2}{5}}y^{-4}$.
57. $-4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{4}}$ এবং $-3a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{5}{4}}$.
58. $-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{3}}$ এবং $-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^{-\frac{1}{3}}$.
59. $-6a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{3}{4}}c^{-\frac{2}{7}}$ এবং $5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{4}}c^{-\frac{5}{7}}$.
60. $-4a^{\frac{5}{8}}x^{\frac{5}{8}}y^{-\frac{4}{5}}$ এবং $-19a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{6}{5}}$.

গুণ কর :

61. $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।
62. $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।
63. $3x^{\frac{2}{3}} - 4y^{\frac{1}{3}}$ কে $3x^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
64. $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
65. $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
66. $a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ কে $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা।
67. $2x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{4}{3}}$ কে $2x^{\frac{4}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{4}{3}}$ দ্বারা।
68. $a^{\frac{5}{2}} + a^2b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} + ab + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{5}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
69. $x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।
70. $a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b + b^{\frac{3}{2}}$ কে $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।
71. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
72. $a^{2n} - a^nx^n + x^{2n}$ কে $a^n + x^n$ দ্বারা।
73. $a^{-3} - 4a^{-2}b + 4a^{-1}b^2 - b^3$ কে $a^{-2} - 2a^{-1}b + b^2$ দ্বারা।

74. $x^{-3}+3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2y^3$ কে $x^{-3}-3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2y^3$ দ্বারা।

75. $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}-5b^{-3}$ কে $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+5b^{-3}$ দ্বারা।

'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অনুসারে গুণফল নির্ণয় কর :

76. $2x^2+3x+9$ এবং $3x+5$ এর। **77.** $x^2-2x-15$ এবং $2x-3$ এর।

78. $3x^3+5x+6$ এবং x^2+3x+2 এর।

79. x^3+px+r এবং $px+q$ এর।

80. $\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2+5$ এবং $\frac{3}{2}x^2+x+2$ এর।

দশম অধ্যায়

জটিল ভাগহার

(Harder Division)

82. তৃতীয় অধ্যায়ে বর্ণিত ভাগের সাধারণ নিয়মগুলি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

(i) $a \div b = a \times \frac{1}{b}$;

(ii) $a \div b \div c = a \div bc$;

(iii) $a \div b \times c = a \times c \div b$;

এবং (iv) m ও n উভয়ই অখণ্ড ধনরাশি এবং $m > n$ হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

শেষোক্ত নিয়মকে ভাগের **সূচক নিয়ম** (Index Rule) বলে।

50 হইতে 52 সংখ্যক নিয়মাবলীতে, একপদ বা বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিবার প্রণালী, এবং তৎসম্পর্কিত চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মের বিষয় বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ করার প্রণালী ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

83. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ :

প্রথমে একটি দৃষ্টান্ত ধরা যাউক। যথা,

যেহেতু, $(2a^2+3ab+4b^2)(a+3b) = 2a^2(a+3b)+3ab(a+3b)+4b^2(a+3b)$
$= 2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3.$

অতএব, $(2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3) \div (a+3b) = 2a^2+3ab+4b^2.$

এক্ষণে, ভাজ্য ও ভাজক দেওয়া থাকিলে ভাগফল কি প্রকারে নির্ণয় করা যায়, তাহা আলোচনা করা যাউক্। উপরোক্ত দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে,

(i) ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই, উহাদের অন্তর্গত একটি সাধারণ অক্ষর a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে লিখিত হইয়াছে।

(ii) ভাগফলের প্রথম পদ, যথা, $2a^2 = 2a^3 \div a$,
অর্থাৎ, = (ভাজ্যের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(iii) ভাজ্য হইতে $2a^2(a+3b)$ বাদ দিলে $3a^2b+13ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের দ্বিতীয় পদ, যথা, $3ab = 3a^2b \div a$, অর্থাৎ, = (উক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(iv) শেষোল্লিখিত অবশিষ্ট হইতে $3ab(a+3b)$ বাদ দিলে $4ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের তৃতীয় পদ, যথা, $4b^2 = 4ab^2 \div a$, অর্থাৎ, = (এই শেষোক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(v) উল্লিখিত শেষোক্ত অবশিষ্ট হইতে $4b^2(a+3b)$ বাদ দিলে, কিছুই অবশিষ্ট থাকে না ; সুতরাং ভাগ করা সম্পূর্ণ হইল।

উপরোক্ত প্রক্রিয়া-প্রণালী নিম্নলিখিতরূপে দেখান যাইতে পারে :

$$\begin{array}{l|l|l} a+3b & 2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3 & 2a^2+3ab+4b^2 \\ & \underline{2a^3+6a^2b} & \\ & \quad 3a^2b+13ab^2+12b^3 & \\ & \quad \underline{3a^2b+\ \ 9ab^2} & \\ & \qquad\quad 4ab^2+12b^3 & \\ & \qquad\quad \underline{4ab^2+12b^3} & \end{array}$$

সুতরাং, ভাগের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় :

ভাজ্য ও ভাজক উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ (common) অক্ষরের অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া পাটীগণিতের পদ্ধতি অনুযায়ী এক পংক্তিতে স্থাপন কর।

ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলের প্রথম পদরূপে লিখ। ভাগফলের এই প্রথম পদ দ্বারা ভাজককে গুণ করিয়া ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর এবং বিয়োগফলকে পূর্ব্বনির্দ্দিষ্ট সাধারণ অক্ষরটির (common letterএর) অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।

এখন, উপরিলব্ধ বিয়োগফলকে একটি নূতন ভাজ্য মনে কর এবং পূর্ব্ব নিয়মানুযায়ী ইহার প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলের দ্বিতীয় পদরূপে লিখ।

ভাগফলের দ্বিতীয় পদ দ্বারা ভাজককে পুনরায় গুণ করিয়া উল্লিখিত নূতন ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর। এই বিয়োগফলকেও নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া উহার উপর পূর্ব্বোক্ত প্রক্রিয়া প্রয়োগ কর, এবং কোন অবশিষ্ট না থাকা পর্য্যন্ত এইরূপে প্রক্রিয়া করিয়া যাও।

টীকা। ইহা সুস্পষ্ট যে, উপরোক্ত নিয়মানুসারে ভাগফল ঠিকরূপেই পাওয়া যায়। কারণ, যে সকল বিভিন্ন রাশিকে ভাজ্য হইতে পর পর বিয়োগ করা হয়, উহারা ভাগফলের এক একটি পদ এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফল হওয়ায়, উহাদের সমষ্টি, সম্পূর্ণ ভাগফল এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফলের, সমান ; আবার, এই সমষ্টি ভাজ্যেরও সমান হওয়ায়, স্পষ্টতঃই প্রদত্ত ভাজ্যটি, ভাগফল ও ভাজকের গুণফলের সমান হইবে ; এবং ইহাই হওয়া উচিত।

উদা. 1. $x^4-4x^2+12x-9$ কে x^2-2x+3 দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে, ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে ; সুতরাং, প্রথমেই নিম্নলিখিতরূপে ভাগের ক্রিয়া আরম্ভ করিতে পারা যায়।

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2-2x+3 & x^4 \qquad\quad -4x^2+12x-9 & x^2+2x-3 \\
 & x^4-2x^3+3x^2 & \\
 & \qquad 2x^3-7x^2+12x-9 & \\
 & \qquad \underline{2x^3-4x^2+\ \ 6x} & \\
 & \qquad\qquad -3x^2+\ \ 6x-9 & \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x^2+\ \ 6x-9} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=x^2+2x-3$.

টীকা। ভাজ্যে x^3-যুক্ত পদটি না থাকায় উহার স্থান শূন্য রাখিয়া, উহার পরবর্ত্তী x^2-যুক্ত পদটিকে, প্রথম পদ x^4 হইতে কিছুদূরে লিখা হইয়াছে। এইপ্রকার করা অত্যাবশ্যকীয় না হইলেও, সদৃশপদগুলি যাহাতে একটির নীচে একটি বসে সেইরূপ করার জন্য, উহার প্রতি লক্ষ্য রাখা দরকার। দৃষ্টান্তস্বরূপ, উপরোক্ত উদাহরণে ভাজ্যের দ্বিতীয় পদ $4x^2$ কে যদি x^4-এর পরেই লিখা হইত, তাহা হইলে $-2x^3$, '$-4x^2$' এর নীচে, এবং $3x^2$, '$12x$' এর নীচে বসিত এবং ইহা দ্বারা প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে, হয় বিয়োগ করার অসুবিধা হইত, না হয় প্রক্রিয়ার সরলতা ক্ষুণ্ণ হইত।

উদা. 2. $16x^4+36x^2+81$ কে $4x^2+6x+9$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l|l|l}
4x^2+6x+9 & 16x^4 \qquad\quad +36x^2 \qquad\quad +81 & 4x^2-6x+9 \\
 & \underline{16x^4+24x^3+36x^2} & \\
 & \qquad -24x^3 \qquad\qquad\qquad +81 & \\
 & \qquad \underline{-24x^3-36x^2-54x} & \\
 & \qquad\qquad\quad 36x^2+54x+81 & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{36x^2+54x+81} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=4x^2-6x+9$.

উদা. 3. $x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$ কে $x^2 - 4$ দ্বারা ভাগ কর।

[দ্রষ্টব্য। ভাজ্য এবং ভাজককে, উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে না সাজাইয়া, ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলেও ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়। কেবলমাত্র লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, উভয়কেই একইভাবে (হয় ঊর্দ্ধক্রমিক, না হয় অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে) সাজাইতে হইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, এই উদাহরণে, ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কেই ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া ভাগ করা যাইতেছে।]

$$
\begin{array}{l}
-4 + x^2 \,\big)\, -12 + 8x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^4 + x^6 \,\big(\, 3 - 2x + x^4 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-12 \qquad\;\; + 3x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 8x \quad - 2x^3 - 4x^4 + x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{8x \quad - 2x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; - 4x^4 + x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{- 4x^4 + x^6}
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= 3 - 2x + x^4$.

উদা. 4. $a^2b^2 + 2abc^2 - a^2c^2 - b^2c^2$ কে $ab + ac - bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্যকে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে $(b^2 - c^2)a^2 + 2bc^2a - b^2c^2$ এই ত্রিপদরাশিটি, এবং ভাজককেও ঐরূপে সাজাইলে $(b + c)a - bc$ এই দ্বিপদরাশিটি, পাওয়া যায়।

$$
\begin{array}{l}
(b + c)a - bc \,\big)\, (b^2 - c^2)a^2 + 2bc^2.a - b^2c^2 \,\big(\, (b - c)a + bc \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{(b^2 - c^2)a^2 - (b^2c - bc^2)a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (b^2c + bc^2)a - b^2c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{(b^2c + bc^2)a - b^2c^2}
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= ab - ac + bc$.

উদা. 5. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ কে $a + b - c$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, ভাজ্য ও ভাজক যথাক্রমে,

$a^3 + 3bc.a + (b^3 - c^3)$ এবং $a + (b - c)$ হয়। অতএব, ভাজ্য একটি ত্রিপদ-রাশি এবং ভাজক একটি দ্বিপদরাশি

$$
\begin{array}{l}
a + (b - c) \,\big)\, a^3 \qquad\qquad + 3bc.a + (b^3 - c^3) \,\big(\, a^2 - (b - c)a + (b^2 + bc + c^2) \\
\qquad\qquad\;\; \underline{a^3 + (b - c)a^2} \\
\qquad\qquad\quad - (b - c)a^2 + 3bc.a + (b^3 - c^3) \\
\qquad\qquad\quad \underline{- (b - c)a^2 - (b - c)^2.a} \\
\qquad\qquad\qquad (b^2 + bc + c^2)a + (b^3 - c^3) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{(b^2 + bc + c^2)a + (b^3 - c^3)}
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc$.

উদা. 6. $(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$ কে

$a^2-ab-ac+bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

ভাজ্য $=(b-c)a^3-b^3a+c^3a+b^3c-bc^3$

$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$, অতএব একটি ত্রিপদরাশি।

এবং ভাজক $=a^2-(b+c)a+bc$, অতএব একটি ত্রিপদরাশি।

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^2-(b+c)a+bc & (b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2) & (b-c)a+(b^2-c^2) \\
 & (b-c)a^3-(b^2-c^2)a^2+bc(b-c)a & \\ \hline
 & (b^2-c^2)a^2-(b^3+b^2c-bc^2-c^3)a+bc(b^2-c^2) & \\
 & (b^2-c^2)a^2-(b^3+b^2c-bc^2-c^3)a+bc(b^2-c^2) & \\ \hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=ab-ac+b^2-c^2$.

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, যে সকল রাশি a এর বিভিন্ন শক্তির সহগরূপে বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে, তাহাদিগকেও b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজান হইয়াছে। এইরূপ করিলে, প্রক্রিয়া সরল হয় এবং ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও কম থাকে।

প্রশ্নমালা 39

ভাগ কর :

1. $x^2-9x+14$ কে $x-7$ দ্বারা। **2.** $3x^2-17x+10$ কে $3x-2$ দ্বারা।

3. $12x^2-8x-32$ কে $4x-8$ দ্বারা।

4. $55x^2-67x-14$ কে $11x+2$ দ্বারা।

5. $2a^2-7ab+6b^2$ কে $a-2b$ দ্বারা।

6. $x^4+x^2y^2+y^4$ কে x^2+xy+y^2 দ্বারা।

7. $4x^2-9a^2$ কে $2x+3a$ দ্বারা। **8.** x^3+a^3 কে $x+a$ দ্বারা।

9. $a^3-a^2b-7ab^2+3b^3$ কে $a-3b$ দ্বারা।

10. $\frac{1}{2}x^3+\frac{23}{10}x^2+\frac{42}{5}x+18$ কে $\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{5}x+6$ দ্বারা।

11. $\frac{3}{2}x^3-\frac{15}{8}x^2+\frac{67}{48}x-\frac{5}{12}$ কে $\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{5}{12}$ দ্বারা।

12. $\frac{1}{6}a^3y^3-\frac{5}{24}a^2y^2b+\frac{67}{432}ayb^2-\frac{5}{108}b^3$ কে $\frac{a^2}{12}y^2-\frac{ab}{16}y+\frac{5}{108}b^2$ দ্বারা।

13. $\frac{7}{2}a^3m^3+\frac{161}{10}a^2m^2n+\frac{294}{5}amn^2+126n^3$ কে

$\frac{7}{2}a^2m^2+\frac{28}{5}amn+42n^2$ দ্বারা।

14. $\frac{4}{9}x^4-x^2y^2+\frac{8}{9}xy^3-\frac{16}{9}y^4$ কে $\frac{2}{9}x^2-\frac{xy}{3}+\frac{4}{9}y^2$ দ্বারা।

15. $\frac{1}{7}y^5 - \frac{3}{7}xy^4 + \frac{2}{21}x^2y^3 + \frac{5}{21}x^3y^2 - \frac{1}{3}x^4y + \frac{2}{21}x^5$ কে $\frac{1}{21}y^2 - \frac{1}{7}xy + \frac{1}{21}x^2$ দ্বারা।

16. $\frac{13}{12}mn^3 + \frac{1}{6}m^2n^2 + \frac{m^4}{2} - \frac{1}{12}m^3n + \frac{1}{3}n^4$ কে $\frac{1}{6}mn + \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{24}n^2$ দ্বারা।

17. $\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{4}y^5 + \frac{a^5}{12} - \frac{3}{4}a^3y^2 - \frac{1}{6}ay^4 - \frac{1}{12}a^4y$ কে $-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{12}a^2$ দ্বারা।

18. $x + y + z = -3a$ হইলে, $(2x - y - z)(2y - z - x)(2z - x - y)$ কে $a^2 + a(x + y) + xy$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় কর।

ভাগ কর:

19. $\frac{1}{3}[(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3]$ কে $(x - y)(y - z)$ দ্বারা।

20. $x^6 - 2a^3x^3 + a^6$ কে $x^2 - 2ax + a^2$ দ্বারা।

21. $2x^3y^3 + y^6 + x^6$ কে $2xy + x^2 + y^2$ দ্বারা।

22. $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$ কে $x + c$ দ্বারা।

23. $x^3 + (b - c - a)x^2 + (ca - ab - bc)x + abc$ কে $x^2 + (b - a)x - ab$ দ্বারা।

24. $a^3 + a^2b + a^2c - abc - b^2c - bc^2$ কে $a^2 - bc$ দ্বারা।

25. $a^2(b + c) - b^2(c + a) + c^2(a + b) + abc$ কে $a - b + c$ দ্বারা।

26. $a^2(b + c) + b^2(a - c) + c^2(a - b) + abc$ কে $a + b + c$ দ্বারা।

27. $x^3 - 2ax^2 + (a^2 - ab - b^2)x + a^2b + ab^2$ কে $x - a - b$ দ্বারা।

28. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ কে $a + b + c$ দ্বারা।

29. $x^3 + y^3 - 1 + 3xy$ কে $x + y - 1$ দ্বারা।

30. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$ কে $x - 2y - 3z$ দ্বারা।

31. $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$ কে $x - y + z$ দ্বারা।

32. $8x^3 - 27y^3 - z^3 - 18xyz$ কে $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ দ্বারা।

33. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ কে $a - b$ দ্বারা।

34. $(x^2 - bx + cx)a - bc(x + a) + (x - b + c)x^2$ কে $(x + a)(x - b)$ দ্বারা।

35. $c(ab - x^2) + (a - b)(x - c)x + x(x^2 - ab)$ কে $(x - b)(x - c)$ দ্বারা।

36. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ কে $ab + bc - ac - b^2$ দ্বারা।

37. $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$ কে $a^2b - bc^2 - ac^2 + a^2c$ দ্বারা।

38. $xy^3 + 2y^3z - xy^2z + xyz^2 - x^3y - 2yz^3 + x^3z - xz^3$ কে $y + z - x$ দ্বারা।

39. $b(x^3 + a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x + a)$ কে $(a + b)(x + a)$ দ্বারা।

40. $(a-b)^2c^2+(a-b)c^3-(c^2-a^2)b^2+(c-a)b^3$ কে $(a-b)c^2-(c-a)b^2$ দ্বারা।

[প্রদত্ত রাশিমালাকে c এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

41. $(ax+by)^3+(ax-by)^3-(ay-bx)^3+(ay+bx)^3$ কে $(a+b)^2x^2-3ab(x^2-y^2)$ দ্বারা। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

[ভাজ্য এবং ভাজককে সরল করিয়া, উভয়কেই x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

42. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$ কে $1+xy+yz+zx$ দ্বারা। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1878.]

[প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

43. $(4x^3-3a^2x)^2+(4y^3-3a^2y)^2-a^6$ কে $x^2+y^2-a^2$ দ্বারা। [বোম্বাই প্রবেশিকা, 1884.]

m এবং n এর সকল প্রকার মানের জন্যই $a^m\div a^n=a^{m-n}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

44. $a^0=1$. $[a^0=a^{m-m}=a^m\div a^m=1.]$

45. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. $[a^{-n}=a^{0-n}=a^0\div a^n=1\div a^n.]$

46. $x^{\frac{5}{2}}\div x^{\frac{3}{2}}=x$.

47. $x^{-\frac{3}{4}}\div x^{-\frac{7}{4}}=x$.

ভাগ কর :

48. $a^2b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

49. $a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{2}}$ কে $a^{-3}b^{\frac{3}{2}}c^2$ দ্বারা।

50. $15xyz$ কে $-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{5}}$ দ্বারা।

51. $9x^{\frac{4}{3}}-16y^{\frac{2}{3}}$ কে $3x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

52. $a+b$ কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

53. $a^3+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3$ কে $a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা।

54. $4x^{\frac{8}{3}}-37x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}+9y^{\frac{8}{3}}$ কে $2x^{\frac{4}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}$ দ্বারা।

55. $a-b^2$ কে $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।

56. $4a^{-10}+12a^{-\frac{15}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+9a^{-5}b^{-3}-25b^{-6}$ কে $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}-5b^{-3}$ দ্বারা।

57. $9x^{-\frac{5}{2}}-25x^{-\frac{5}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+70x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{9}{8}}-49y^{-\frac{3}{2}}$ কে $3x^{-\frac{5}{4}}+5x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{3}{8}}-7y^{-\frac{3}{4}}$ দ্বারা।

58. $a^3 - b^2$ কে $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

59. $x + y + z - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

84. অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division) : কখন কখন ভাজ্যটিকে ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায় না। দৃষ্টান্তস্বরূপ, 83 নিয়মের দ্বিতীয় উদাহরণের ভাজ্যটি যদি $16x^4 + 36x^2 + 6x + 86$ হইত, তাহা হইলে দ্বিতীয় অবশিষ্টটি (অর্থাৎ বিয়োগফলটি) $36x^2 + 60x + 86$, এবং সর্ব্বশেষ অবশিষ্টটি $6x + 5$ হইত। এখন, যেহেতু $6x + 5$ কে $4x^2 + 6x + 9$ দ্বারা ভাগ করা যায় না, এস্থলে ভাগের ক্রিয়া অসম্পূর্ণই রহিয়া যাইত, এবং পাটীগণিতের ন্যায় ভাগফলটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে হইত। যথা,

$$\frac{16x^4 + 36x^2 + 6x + 86}{4x^2 + 6x + 9} = 4x^2 - 6x + 9 + \frac{6x + 5}{4x^2 + 6x + 9}.$$

উপরিলিখিত অভেদটির ডা'নদিকের অংশটিকে **পূর্ণ ভাগফল** (complete quotient) বলে। ভাজ্যের যে সর্ব্বশেষ অংশটিকে ভাজক দ্বারা আর ভাগ দেওয়া যায় না, তাহাকে **ভাগশেষ** (remainder) বলে। অতএব, যদি D, d, Q এবং R যথাক্রমে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল এবং ভাগশেষ বুঝায়, তবে স্পষ্টতঃই

$$D = d \times Q + R.$$

85. 'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রক্রিয়া (Method of detached co-efficients) : যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই কোন একটি নির্দ্দিষ্ট অক্ষরবিশিষ্ট রাশি, অথবা উভয়ই একই অক্ষরসমূহের সমমাত্র রাশি হয়, তাহা হইলে উহাদের অন্তর্গত পদসমূহের সহগগুলিকে, অক্ষরসমূহ হইতে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থাপন করিয়াই ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায় এবং এতদ্দ্বারা 'দীর্ঘ ভাগ' সম্পন্নকরণ-জনিত কষ্টের লাঘব করা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী স্পষ্টরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1. $6x^4 + 13x^3 + 39x^2 + 37x + 45$ কে $3x^2 + 2x + 9$ দ্বারা ভাগ কর।

```
3 + 2 + 9)6 + 13 + 39 + 37 + 45(2 + 3 + 5
          6 +  4 + 18
          ------------
             + 9 + 21 + 37
             + 9 +  6 + 27
             -------------
                  15 + 10 + 45
                  15 + 10 + 45
```

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= 2x^2 + 3x + 5$.

সাধারণ নিয়মানুসারেঃ

$$\begin{array}{r|l|l} 3x^2+2x+9 & 6x^4+13x^3+39x^2+37x+45 & 2x^2+3x+5 \\ & \underline{6x^4+\ \ 4x^3+18x^2} & \\ & \qquad 9x^3+21x^2+37x & \\ & \qquad \underline{9x^3+\ \ 6x^2+27x} & \\ & \qquad\qquad 15x^2+10x+45 & \\ & \qquad\qquad \underline{15x^2+10x+45} & \end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=2x^2+3x+5.$

উদা. 2. x^3-27 কে x^2+3x+9 দ্বারা ভাগ কর।

[**দ্রষ্টব্য।** যদি ভাজ্য কিংবা ভাজকে, x এর কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্তমান না থাকে, তবে উক্ত পদটির সহগ 'শূন্য' (zero) ধরিয়া উহাকে যথাস্থানে লিখিয়া লইতে হয়।]

$$\begin{array}{r|l|l} 1+3+9 & 1+0+0-27 & 1-3 \\ & \underline{1+3+9} & \\ & \ \ -3-9-27 & \\ & \ \ \underline{-3-9-27} & \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=x-3.$

প্রশ্নমালা 40

'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অনুসারে ভাগফল নির্ণয় কর :

1. $2m^3-9m^2n+13mn^2-6n^3$ কে $2m-3n$ দ্বারা।
2. $a^4-3a^3b+3ab^3-b^4$ কে a^2-b^2 দ্বারা।
3. $2x^4-3x^3y-3xy^3-2y^4$ কে x^2+y^2 দ্বারা।
4. $2a^4-36a^2x^2-16ax^3$ কে $2a^2+8ax$ দ্বারা।
5. $3+2x+4x^2+5x^3-4x^4+2x^5$ কে $1+2x^2$ দ্বারা।
6. $x^4-4x^2+12x-9$ কে x^2+2x-3 দ্বারা।
7. $4a^4-9a^2b^2+24ab^3-16b^4$ কে $2a^2-3ab+4b^2$ দ্বারা।
8. $a^4+4a^2x^2+16x^4$ কে $a^2+2ax+4x^2$ দ্বারা।
9. a^4+4b^4 কে $a^2+2ab+2b^2$ দ্বারা।
10. $2x^5-7x^4-2x^3+18x^2-3x-8$ কে x^3-2x^2+1 দ্বারা।
11. x^4-81 কে $x-3$ দ্বারা। 12. a^5-32 কে $a-2$ দ্বারা।
13. $3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$ কে $1-3x+x^3$ দ্বারা।

14. $82x^2 + 40 - 45x^3 + 18x^4 - 67x$ কে $6x^2 + 8 - 7x$ দ্বারা।

15. $64 - x^6$ কে $2 - x$ দ্বারা। **16.** $1 + x^6 - 2x^3$ কে $x^2 + 1 - 2x$ দ্বারা।

17. $13ab^3 + 2a^2b^2 + 6a^4 - a^3b + 4b^4$ কে $4ab + b^2 + 3a^2$ দ্বারা।

18. $a^3b - 15b^4 - 8a^2b^2 + a^4 + 19ab^3$ কে $a^2 + 3b^2 - 2ab$ দ্বারা।

19. $x^6 - a^6$ কে $x^3 - 2x^2a + 2xa^2 - a^3$ দ্বারা।

20. $8a^2b^3 + 3b^5 + a^5 - 9a^3b^2 - 2ab^4 - a^4b$ কে $2ab - 3b^2 + a^2$ দ্বারা।

21. $y^6 + x^6 - 2x^3y^3$ কে $x^2 + y^2 - 2xy$ দ্বারা।

পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর :

22. $\dfrac{x^2 + 11x + 35}{x + 5}$. **23.** $\dfrac{x^3 + \frac{1}{27}y^3}{x - \frac{1}{3}y}$.

24. $x^3 + px^2 + qx + r$ কে $x^2 + px + q$ দ্বারা ভাগ করা হইলে, ভাগশেষ কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

25. ভাগফলে চারিটি পদ পর্য্যন্ত রাখিয়া, $1 + 2x + 4x^2$ কে $3 - x$ দ্বারা ভাগ কর।

86. কতিপয় আবশ্যকীয় ফল (A few important results) :

শিক্ষার্থিগণের অবশ্যই জানা আছে যে, $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

এবং $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$.

অতএব, $x^4 - a^4$ [যাহা $= x^3(x - a) + a(x^3 - a^3)$]

$$= (x - a)\{x^3 + a(x^2 + xa + a^2)\}$$
$$= (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3).$$

তদ্রূপ, $x^5 - a^5$ [যাহা $= x^4(x - a) + a(x^4 - a^4)$]

$$= (x - a)\{x^4 + a(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)\}$$
$$= (x - a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4).$$

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, $x^6 - a^6$, $x^7 - a^7$, $x^8 - a^8$ প্রভৃতি রাশিসমূহের প্রত্যেকটিরই একটি উৎপাদক (factor) $x - a$; অতএব, সাধারণভাবে বলা যায় যে, n একটি ধনাত্মক, অখণ্ড সংখ্যা (positive integer) হইলে, $x^n - a^n$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হইবে।

অতএব, সিদ্ধান্ত করা যায় যে, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, $x^n - a^n$, $x - a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য (exactly divisible).

আবার, যেহেতু $x^n + a^n = (x^n - a^n) + 2a^n$, এবং $x^n - a^n$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু $2a^n$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না ; অতএব, দেখা যায় যে, $x^n + a^n$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না।

সুতরাং, n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,
$x^n - a^n$ সকল ক্ষেত্রেই $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য ;
$x^n + a^n$ কোন ক্ষেত্রেই $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য নহে। (ক)

অনুসি. 1. n কেবলমাত্র অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা (even integer) হইলে, $x^n - a^n$, $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য।

কারণ, n অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n = a^n$; † সুতরাং, $x^n - a^n = x^n - (-a)^n$;
n অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n = -a^n$; † সুতরাং $x^n - a^n = x^n + (-a)^n$;
অধিকন্তু, $x + a = x - (-a)$.

এখন, (ক) হইতে দেখা যায় যে, $x - (-a)$ দ্বারা $x^n - (-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n + (-a)^n$ বিভাজ্য নয়। সুতরাং, n অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলেই $x^n - a^n$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করা যায়, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে, ঐরূপ ভাগ করা যায় না।

অনুসি. 2. n একটি অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $x + a$ দ্বারা $x^n + a^n$ কে সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায়।

কারণ, n অযুগ্ম হইলে, $(-a)^n = -a^n$; সুতরাং, $x^n + a^n = x^n - (-a)^n$;
n যুগ্ম হইলে, $(-a)^n = a^n$; সুতরাং, $x^n + a^n = x^n + (-a)^n$;
অধিকন্তু, $x + a = x - (-a)$.

এখন, (ক) হইতে দেখা যায় যে, $x - (-a)$ দ্বারা $x^n - (-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n + (-a)^n$ বিভাজ্য নয়।

অতএব, n অযুগ্ম হইলেই $x^n + a^n$, $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু n যুগ্ম হইলে, $x^n + a^n$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না।

† গুণনের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মের বার বার প্রয়োগ দ্বারা এইরূপ ফল পাওয়া যায় ; যথা, $(-a)^2 = a^2$; সুতরাং, $(-a)^3 = (-a) \times (-a)^2 = (-a) \times a^2 = -a^3$; $(-a)^4 = (-a) \times (-a)^3 = (-a) \times (-a^3) = a^4$; $(-a)^5 = (-a) \times (-a)^4 = (-a) \times a^4 = -a^5$; ইত্যাদি। অর্থাৎ, $-a$ এর বিভিন্ন শক্তির সূচকগুলি প্রত্যেকে যুগ্মসংখ্যা হইলে, শক্তিগুলি প্রত্যেকেই ধনাত্মক, এবং সূচকগুলি অযুগ্মসংখ্যা হইলে, শক্তিগুলি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় :*

$x - a$ দ্বারা $x^n - a^n$ সকল ক্ষেত্রেই বিভাজ্য ;
কিন্তু, $x^n + a^n$ কোন ক্ষেত্রেই বিভাজ্য নয়।

$x + a$ দ্বারা $x^n - a^n$ বিভাজ্য, যখন n একটি অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা
এবং $x^n + a^n$ বিভাজ্য, যখন n একটি অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা।

প্রশ্নমালা 41

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য :

1. $x^3 + a^3$. **2.** $x^4 - a^4$. **3.** $x^5 + a^5$.
4. $x^6 - a^6$. **5.** $x^7 + a^7$. **6.** $x^8 - a^8$.

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য নহে :

7. $x^3 - a^3$. **8.** $x^4 + a^4$. **9.** $x^5 - a^5$.
10. $x^6 + a^6$. **11.** $x^7 - a^7$. **12.** $x^8 + a^8$.

ভাগফল লিখ :

13. $x^4 - 1$ কে $x - 1$ দ্বারা। **14.** $x^4 - y^4$ কে $x + y$ দ্বারা।
15. $x^5 - 1$ কে $x - 1$ দ্বারা। **16.** $x^5 + y^5$ কে $x + y$ দ্বারা।
17. $x^6 - 1$ কে $x - 1$ দ্বারা। **18.** $x^6 - y^6$ কে $x + y$ দ্বারা।
19. $x^7 - 1$ কে $x - 1$ দ্বারা। **20.** $x^7 + y^7$ কে $x + y$ দ্বারা।

একাদশ অধ্যায়

সূত্রাবলী ও উহাদের জ্যামিতিক সমাধান

(Formulæ and their geometrical representation)

87. ছাত্রগণের সুবিধার জন্য, চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত সূত্রাবলী নিয়ে পুনরায় সন্নিবেশিত হইল। বীজগণিতের অনেক প্রক্রিয়াই সরল ও নিপুণভাবে সম্পন্ন করিতে হইলে, এই সূত্রসমূহের সম্যক্ ধারণা থাকা একান্ত আবশ্যক। অতএব, বার বার দেখিয়া লইয়া উহাদের প্রয়োগ করা অপেক্ষা, উহাদিগকে মুখস্থ করিয়া রাখাই কর্তব্য।

* ত্রয়োবিংশ অধ্যায়ে এইগুলি যথাযথভাবে প্রমাণিত হইবে।

(i) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(iv) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

(v) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$.

(vi) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)^3-3ab(a+b)$

(vii) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)^3+3ab(a-b)$.

(viii) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(ix) $(x-a)(x+b) = x^2+(b-a)x-ab$

(x) $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$

88. সূত্রাবলীর প্রয়োগঃ

উদা. 1. 999×999 এবং 9988×10012 এর গুণফল নির্ণয় কর।

এখন, $999 \times 999 = 999^2$
$= (1000-1)^2$
$= 1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1^2$ [সূত্র (ii)]
$= 1000000 - 2000 + 1$
$= 998001$

আবার, $9988 \times 10012 = 10012 \times 9988$
$= (10000+12)(10000-12)$
$= 10000^2 - 12^2$ [সূত্র (iii)]
$= 100000000 - 144$
$= 99999856$.

উদা. 2. $2931^3 + 1069^3 + 12000 \times 2931 \times 1069$ এর মান নির্ণয় কর।

a কে 2931 এবং b কে 1069 ধরিয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $= a^3 + b^3 + 12000ab$
$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
[যেহেতু, $a+b = 2931+1069 = 4000$.]
$= (a+b)^3$ [সূত্র (iv)]
$= (4000)^3$
$= 4000 \times 4000 \times 4000$
$= 64000000000$.

টীকা। অধিকন্তু, চতুর্থ অধ্যায়ের উদাহরণগুলি দেখ।

89. কোন একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা (to express an algebraic quantity as the difference of two squares) :

যেহেতু, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

সুতরাং, (প্রথম অভেদ হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিয়া)

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2\ ;$$

অথবা, $ab=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

অতএব, দুইটি রাশির গুণফল = (রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ)^2 − (রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের অর্দ্ধ)^2

উদা. 1. $(x+y+2z)(x+y)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$(x+y+2z)(x+y)=\left\{\frac{(x+y+2z)+(x+y)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(x+y+2z)-(x+y)}{2}\right\}^2$$
$$=\left[\frac{2x+2y+2z}{2}\right]^2-\left[\frac{x+y+2z-x-y}{2}\right]^2$$
$$=(x+y+z)^2-z^2.$$

উদা. 2. $(x+1)(2x+3)(x+5)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+1)(2x+3)\}(x+5)=(2x^2+5x+3)(x+5)$
$$=\left\{\frac{(2x^2+5x+3)+(x+5)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(2x^2+5x+3)-(x+5)}{2}\right\}^2$$
$$=(x^2+3x+4)^2-(x^2+2x-1)^2.$$

উদা. 3. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+a)(x+4a)\}\{(x+2a)(x+3a)\}$
$$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)$$
$$=\left\{\frac{(x^2+5ax+4a^2)+(x^2+5ax+6a^2)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(x^2+5ax+6a^2)-(x^2+5ax+4a^2)}{2}\right\}^2$$
$$=(x^2+5ax+5a^2)^2-(a^2)^2.$$

উদা. 4. $(x+2a)(x+4a)(x+6a)(x+8a)+7a^4$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+2a)(x+8a)\}\{(x+4a)(x+6a)\}+7a^4$

$$=(x^2+10ax+16a^2)(x^2+10ax+24a^2)+7a^4$$

$$=\left\{\frac{(x^2+10ax+16a^2)+(x^2+10ax+24a^2)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x^2+10ax+24a^2)-(x^2+10ax+16a^2)}{2}\right\}^2+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-(4a^2)^2+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-16a^4+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-(3a^2)^2.$$

প্রশ্নমালা 42

[87 নিয়মের সূত্রাবলীর সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সমাধান করিতে হইবে।]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. $5x+9y$. **2.** $16a-13b$. **3.** $x+100$. **4.** $y+500$.
5. $a+999$. **6.** $y+10001$. **7.** 988. **8.** 1012.
9. 100·5. **10.** 99·6.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :

11. $2x+5$. **12.** 105. **13.** 99·5. **14.** 800·6.

15. দেখাও যে, $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

ইহা হইতে, a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর, যখন,
(i) $a=5004$, $b=4996$; (ii) $a=1012$, $b=988$.

16. দেখাও যে, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

ইহা হইতে নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(i) $4(x+2y)(2x+y)$; (ii) $(6x+10y)(4x+6y)$;
(iii) $(x+98)(x+102)$; (iv) 505×495 ;
(v) $(2x+100{\cdot}4)(2x+99{\cdot}6)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর

17. $(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$. **18.** $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$.

19. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

20. $98 \times 102 \times 10004$.

21. $96 \times 104 \times 10016$.

22. $(2a+x)(4a^2+4ax+x^2)$.

23. $(a-2)(a+2)(a^2+4a+4)(a^2-4a+4)$.

24. $(x+4)(x^2-4x+16)$.

25. $(2y-3)(4y^2+6y+9)$.

26. $(x+2)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2-2x+4)$.

27. $(2x+105)(2x+15)$.

28. $(6x-25)(6x+43)$.

29. $(6x-25)(6x-43)$.

সরল কর:

30. $(2a+x+y)^2+2(2a+x+y)(8a-x-y)+(8a-x-y)^2$.

$(17a+20x+19y)^2-2(19x+18y+17a)(20x+19y+17a)$
$+(19x+18y+17a)^2$.

32. $(16a+x+y)^3+(4a-x-y)^3+3(16a+x+y)^2(4a-x-y)$
$+3(16a+x+y)(4a-x-y)^2$.

33. $(121a+x+y)^3-(116a+x+y)^3-15a(121a+x+y)(116a+x+y)$.

34. $(5a-8x)^3+(6a+8x)^3+33a(5a-8x)(6a+8x)$.

35. $(2x+3y-16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)$
$+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)(2x+3y-16z)^2-120x^3$.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

36. x^2+5x+6.

37. $5y^2+65y+200$.

a^4+4b^4.

39. $(x+y)^2+15(x+y)+36$.

$(5a+8b+2)^2-(4a+6)^2$.

41. $8x^3+125y^3$.

42. $(8a+13x)^3-64$.

43. $(15a+3b)^2-4$.

44. $5x^3-5x^2y-30xy^2$.

মান নির্ণয় কর:

45. $(16a+2b)^2-2(13a+2b)(16a+2b)+(13a+2b)^2$,
যখন $a=5$ এবং $b=7891$.

46. $(91x+5y)^3-3(91x+5y)^2(87x+5y)$
$+3(91x+5y)(87x+5y)^2-(87x+5y)^3$, যখন $x=2$ এবং $y=83$.

47. $(589963)^2-2\times 589963 \times 589863+(589863)^2$.

48. $90{\cdot}002 \times 89{\cdot}998$.

49. 9238^2-9233^2.

50. $49856 \times 49856 \times 49856$
$-3\times 49856 \times 49855 - 49855 \times 49855 \times 49855$.

51. $(x+2)(2x+1)(5x+2)-3x^4$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

52. দেখাও যে, $(ax+b)(bx+a)\{abx^2-(a^2+b^2)x+ab\}$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

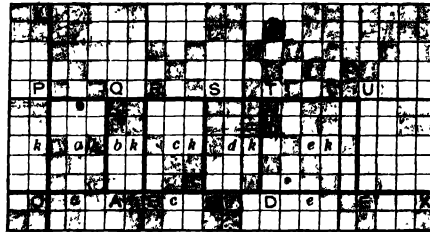
53. $(5x+1)(2x+5)(3x+5)(4x+3)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

54. $(7x+3a)(7x+5a)(7x+9a)(7x+11a)+61a^4$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টি-রূপে প্রকাশ কর।

90. বীজগণিতীয় সূত্রাবলীর জ্যামিতিক সমাধান : এক্ষণে, বর্গাঙ্কিত কাগজের (squared paper এর) উপর অঙ্কিত জ্যামিতিক চিত্র সাহায্যে কতকগুলি সূত্র প্রতিপন্ন করা যাইতেছে।

(1) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b+c+d+e)k=ak+bk+ck+dk+ek.$$

ধর, বর্গাঙ্কিত কাগজের উপর O বিন্দুটিকে মূলবিন্দু (origin), এবং OX, OY রেখাদ্বয়কে অক্ষরেখা (axes) লওয়া হইল।

এখন মনে কর যে, OX অক্ষরেখাটির উপর A, B, C, D, E বিন্দুগুলি এরূপে লওয়া হইল যে, $OA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$ এবং $DE=e$; আবার OY অক্ষরেখাটির উপর P বিন্দুটিকে এরূপে লওয়া হইল যে, $OP=k$. $OPUE$ আয়তক্ষেত্রটি (rectangle) সম্পূর্ণ কর। A, B, C, D, E বিন্দুগুলি দিয়া OP এর সমান্তরাল করিয়া AQ, BR, CS, DT, EU রেখাগুলি টান এবং মনে কর উহারা PU রেখাটির সহিত যথাক্রমে Q, R, S, T, U বিন্দুগুলিতে মিলিত হইয়াছে। তাহা হইলে অবশ্যই, $OPQA$, $AQRB$, $BRSC$, $CSTD$, $DTUE$ ক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকেই এক একটি আয়ত।

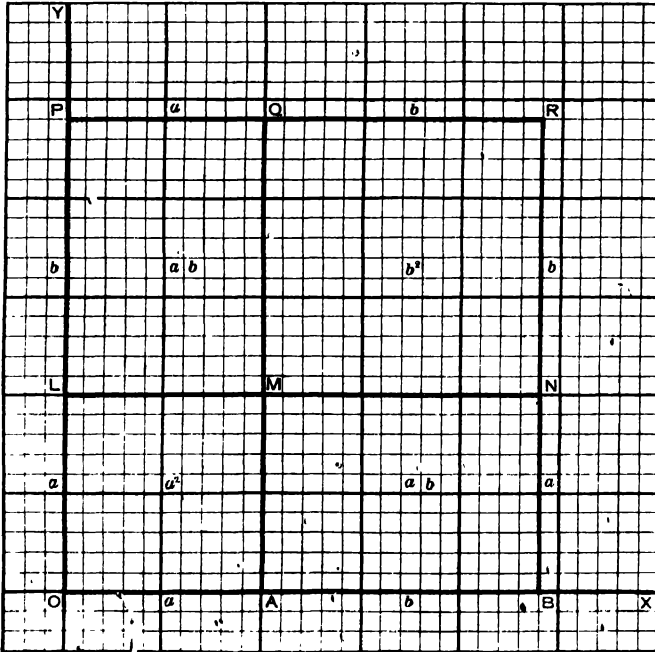
এখন, আয়ত $PE=$ আয়ত $PA+$ আয়ত $QB+$ আয়ত RC
+ আয়ত $SD+$ আয়ত TE......(1)

কিন্তু, আয়ত $PE = OE.OP = (OA + AB + BC + CD + DE).OP$
$= (a + b + c + d + e).k$;

এবং আয়ত $PA = OA.OP = ak$;
আয়ত $QB = AB.AQ = AB.OP = bk$;
আয়ত $RC = BC.BR = BC.OP = ck$;
আয়ত $SD = CD.CS = CD.OP = dk$;
আয়ত $TE = DE.DT = DE.OP = ek$.

অতএব, (1) হইতে, $(a + b + c + d + e)k = ak + bk + ck + dk + ek$.

(2) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

বর্গাঙ্কিত কাগজের উপর O কে মূলবিন্দু এবং OX, OY এই পরস্পর-লম্ব রেখাদ্বয়কে অক্ষরেখা (axes) লও।

ধর, OX রেখার উপর A ও B দুইটি বিন্দুকে এরূপে লওয়া হইল যে, $OA = a$ এবং $AB = b$; আবার মনে কর, OY রেখার উপর L ও P দুইটি বিন্দুকে এরূপে লওয়া হইল যে, $OL = a$ এবং $LP = b$; তাহা হইলে, $OB = OP = a + b$; $OPRB$ বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর ; এখন, A বিন্দু দিয়া OY এর সমান্তরাল করিয়া AQ রেখা, এবং L বিন্দু দিয়া OX এর সমান্তরাল করিয়া LMN রেখা অঙ্কিত কর। ধর, AQ, PR রেখার সহিত Q বিন্দুতে, এবং LMN রেখা, AQ ও BR রেখাদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে স্পষ্টই,

$$\text{ক্ষেত্র } OR = \text{ক্ষেত্র } OM + \text{ক্ষেত্র } AN + \text{ক্ষেত্র } LQ + \text{ক্ষেত্র } MR \ldots (1)$$

এখন, $$\text{ক্ষেত্র } OR = OB.OP = OB.OB = OB^2 = (a+b)^2 \;;$$

এবং $$\text{ক্ষেত্র } OM = OA.OL = OA.OA = a^2 \;;$$

$$\text{ক্ষেত্র } AN = AM.AB = OL.AB = ab \;;$$

$$\text{ক্ষেত্র } LQ = LM.LP = PQ.LP = ab \;;$$

$$\text{ক্ষেত্র } MR = MN.MQ = QR.LP = b.b = b^2.$$

অতএব, (1) হইতে, $$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

(3) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

মনে কর, O কে মূলবিন্দু, এবং OX, OY এই পরস্পর-লম্ব রেখা দুইটিকে অক্ষরেখা লওয়া হইল। OX এর উপর A ও B বিন্দু দুইটিকে এরূপে লও যে, $OA = a$ এবং $OB = b$; OA এর উপর $OPQA$ বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর। B বিন্দু দিয়া OY এর সমান্তর করিয়া BR রেখাটি টান, এবং মনে কর, উহা PQ কে R বিন্দুতে ছেদ করিল ; PO হইতে b এর সমান করিয়া PL অংশটি কাট ; L বিন্দু দিয়া OX এর সমান্তরাল LMN রেখা অঙ্কিত কর, এবং ধর, উহা BR এবং AQ কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে কাটিয়াছে। PQ এর বর্দ্ধিতাংশের উপর এরূপে T বিন্দুটি লও যে, $QT = PR (= b)$. QT এর উপর $QTSN$ বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর।

যেহেতু, $OA=a$, এবং $OB=b$; অতএব, $BA=a-b$.

আবার, যেহেতু $OP=OA=a$, এবং $PL=b$; অতএব, $OL=a-b$.

সুতরাং, $AB=OL$.

এখন, ক্ষেত্র $BN=$ ক্ষেত্র $OQ+$ ক্ষেত্র $NT-$ ক্ষেত্র $OR-$ ক্ষেত্র RS.........(1)

ক্ষেত্র $BN=BA.BM=BA.OL=BA.BA=BA^2=(a-b)^2$;

ক্ষেত্র $OQ=OA.OP=OA.OA=OA^2=a^2$;

ক্ষেত্র $NT=QT$ এর উপর বর্গক্ষেত্র $=b^2$;

ক্ষেত্র $OR=OP.OB=OA.OB=ab$;

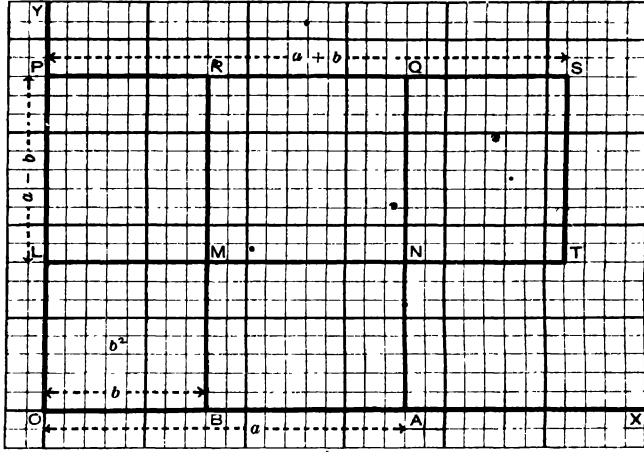
ক্ষেত্র $RS=$ ক্ষেত্র $RN+$ ক্ষেত্র $QS=$ ক্ষেত্র $RN+$ ক্ষেত্র PM

$=$ ক্ষেত্র PN, [$\because$ ক্ষেত্র $QS=$ ক্ষেত্র PM, কারণ, প্রত্যেকে b^2 এর সমান।]

$=PQ.PL=ab.$

অতএব, (1) হইতে, $(a-b)^2=a^2+b^2-ab-ab=a^2-2ab+b^2.$

(4) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

বর্গাঙ্কিত কাগজে, OX অক্ষটির উপর দুইটি বিন্দু A ও B এরূপে লও যে, $OA=a$ এবং $OB=b$; আবার, OY অক্ষটির উপর দুইটি বিন্দু P এবং L এরূপে লও যে, $OP=a$ এবং $OL=b$. $OPQA$ এবং $OLMB$ বর্গক্ষেত্র দুইটি সম্পূর্ণ কর। BM কে বর্দ্ধিত করিয়া PQ এর সহিত R বিন্দুতে, এবং LM কে বর্দ্ধিত করিয়া AQ এর সহিত N বিন্দুতে, মিলিত কর; আবার, MN কে T বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর, যেন $NT=NA$ $(=b)$; $NTSQ$ আয়তটি সম্পূর্ণ কর।

স্পষ্টই, আয়ত BN = আয়ত QT; আরও, $PL=OP-OL=a-b$, এবং $AB=OA-OB=a-b$; অতএব, $PL=AB$.

এখন, ক্ষেত্র PA − ক্ষেত্র BL = ক্ষেত্র PN + ক্ষেত্র BN

= ক্ষেত্র PN + ক্ষেত্র QT = ক্ষেত্র PT ... (1)

কিন্তু, ক্ষেত্র $PA=OA$ এর উপর বর্গ $=a^2$;

ক্ষেত্র $BL=OB$ এর উপর বর্গ $=b^2$;

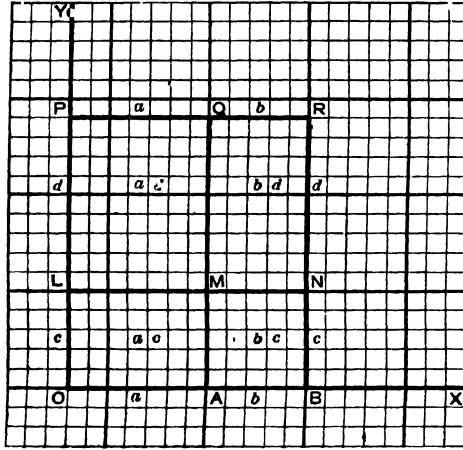
এবং ক্ষেত্র $PT=PS.PL=(PQ+QS).PL$

$=(PQ+NT).PL=(a+b)(a-b)$.

সুতরাং, (1) হইতে, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(5) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

বর্গাঙ্কিত কাগজে, OX অক্ষটির উপর দুইটি বিন্দু A ও B এরূপে লও যে, $OA=a$ এবং $AB=b$; আবার, OY অক্ষটির উপর দুইটি বিন্দু P ও L এরূপে লও যে, $OL=c$ এবং $LP=d$.

$OPRB$ এবং $OLNB$ আয়তক্ষেত্র দুইটি সম্পূর্ণ কর। A বিন্দু দিয়া OY এর সমান্তর করিয়া AMQ রেখাটি টান এবং মনে কর, উহা LN কে M বিন্দুতে এবং PR কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ক্ষেত্র $OR=$ ক্ষেত্র $OM+$ ক্ষেত্র $AN+$ ক্ষেত্র $LQ+$ ক্ষেত্র MR...(1)

কিন্তু, ক্ষেত্র $OR=OB.OP=(OA+AB)(OL+LP)=(a+b)(c+d)$;

ক্ষেত্র $OM=OA.OL=ac$;

ক্ষেত্র $AN=AB.AM=AB.OL=bc$;

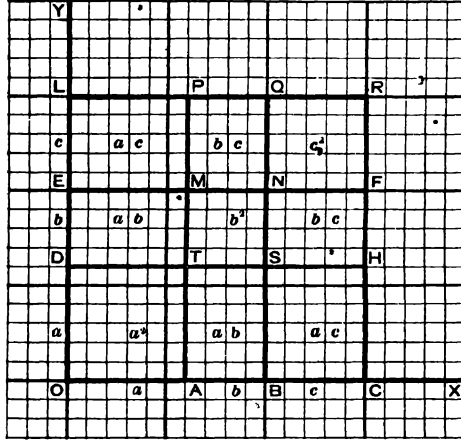
ক্ষেত্র $LQ=PQ.PL=OA.PL=ad$;

ক্ষেত্র $MR=QR.QM=AB.PL=bd$.

অতএব, (1) হইতে, $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

(6) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

বর্গাঙ্কিত কাগজে, OX অক্ষরেখাটির উপর তিনটি বিন্দু A, B ও C এরূপে লও যে, $OA=a$, $AB=b$ এবং $BC=c$.

OC এর উপর $OCRL$ বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর ; তাহা হইলে, অবশ্যই $OL=OC$ $=OA+AB+BC=a+b+c$.

OL এর উপর দুইটি বিন্দু D ও E এরূপে লও যে, $OD=a$, এবং $DE=b$; সুতরাং, $EL=c$.

A ও B দিয়া OY এর সমান্তর করিয়া AP ও BQ রেখা দুইটি আঁক, এবং মনে কর, উহারা LR কে যথাক্রমে P ও Q তে ছেদ করিল ; আবার, D ও E দিয়া OX এর সমান্তর করিয়া $DTSH$ ও $EMNF$ রেখা দুইটি আঁক, এবং ধর, উহারা AP, BQ, CR রেখাত্রয়কে যথাক্রমে T, S, H এবং M, N, F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ক্ষেত্র OR = ক্ষেত্র OT + ক্ষেত্র TN + ক্ষেত্র NR + ক্ষেত্র DM
+ ক্ষেত্র AS + ক্ষেত্র PN + ক্ষেত্র NH + ক্ষেত্র EP
+ ক্ষেত্র BH. … … ,(1)

কিন্তু, ক্ষেত্র $DM = DT.DE = OA.AB = ab$;
ক্ষেত্র $AS = AT.AB = OD.AB = ab$;

তদ্রূপ, ক্ষেত্র NP = ক্ষেত্র $NH = bc$; ক্ষেত্র EP = ক্ষেত্র $BH = ac$.

আবার, ক্ষেত্র $OR = OC$ এর উপর বর্গ $= OC^2 = (OA + AB + BC)^2$
$= (a + b + c)^2$;

ক্ষেত্র $OT = OA.OD = OA.OA = OA^2 = a^2$;
ক্ষেত্র $TN = TM.TS = AB.DE = AB^2 = b^2$;
ক্ষেত্র $NR = NQ.NF = EL.BC = BC^2 = c^2$;

সুতরাং, (1) হইতে,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + bc + bc + ac + ac$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

প্রশ্নমালা 43

জ্যামিতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

1. (i) $(5+6) \times 11$; (ii) 7^2 ; (iii) $(\frac{5}{2} - \frac{1}{2})^2$.

2. জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে,

(i) $9^2 - 7^2 = 32$; (ii) $(7+3)^2 = 100$;

(iii) $(3+5) \times 2 = 3 \times 2 + 5 \times 2$;

(iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$;

(v) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$;

(vi) $(x-a)(x+b) = x^2 - ax + bx - ab$.

3. জ্যামিতির সাহায্যে, বার ফুট দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. 5 ফুট লম্বা এবং 3 ফুট চওড়া একখানি ঘরের ক্ষেত্রফল জ্যামিতির সাহায্যে নির্ণয় কর।

5. 9 গজ লম্বা এবং 3 গজ চওড়া এক বাগানের চারিধারে এক গজ প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। জ্যামিতির সাহায্যে, বাগান ও রাস্তার মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. 10 গজ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একখানি বর্গক্ষেত্রাকৃতি জমির মধ্যে 4 গজ দীর্ঘ বাহু-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকৃতি পুকুর খনন করা হইল ; জ্যামিতির সাহায্যে বাকী জমির পরিমাণ নির্ণয় কর।

7. জ্যামিতির সাহায্যে, এরূপ একখানি আয়তক্ষেত্রাকৃতি জমির পরিমাণ নির্ণয় কর, যাহার দৈর্ঘ্য 50 গজ এবং প্রস্থ দৈর্ঘ্যের এক-পঞ্চমাংশ।

8. 10 গজ লম্বা ও 5 গজ চওড়া একখানি আয়তক্ষেত্রাকৃতি উঠান বর্গক্ষেত্রাকৃতি পাথর দ্বারা বাঁধাইতে হইবে ; একখানা পাথরের বাহুর দৈর্ঘ্য এক গজ হইলে মোট কতখানা পাথর লাগিবে, জ্যামিতির সাহায্যে তাহা নির্ণয় কর।

9. 20 গজ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকৃতি একটি বাগানের ভিতরে এক গজ প্রশস্ত একটি পথ, বাগানের চারিধারে বরাবর চলিয়া গিয়াছে। জ্যামিতির সাহায্যে পথের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. 20 গজ দীর্ঘ ও 10 গজ প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্রাকৃতি বাগানের ভিতর এক গজ প্রশস্ত দুইটি সোজা রাস্তা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। রাস্তা দুইটি যদি আয়তের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বয়ের উভয় পার্শ্বে সমভাবে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে, জ্যামিতির সাহায্যে, রাস্তা বাদে বাগানের বাকী জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দ্বাদশ অধ্যায়

সহজ উৎপাদক-বিশ্লেষণ

(Simple Factorisation)

91. সংজ্ঞা : কোন এক রাশি, দুই বা তদধিক রাশির গুণফল হইলে, শেষোক্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (factor) বলে।

'কোন রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা (to resolve an expression into factors)' এর অর্থ 'যে যে রাশির পরস্পর গুণন দ্বারা উপরোক্ত রাশিটি উৎপন্ন হইয়াছে, সেই রাশিসমূহ নির্ণয় করা'।

[উৎপাদক-বিশ্লেষণের কতিপয় সহজ প্রণালী প্রসঙ্গক্রমে চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। এস্থলে, সেইগুলি একেবারে উপেক্ষিত হইবে না, কারণ, এই অধ্যায়ে উৎপাদক-বিশ্লেষণের নিয়মাবলীই অধিকতর শৃঙ্খলার সহিত আলোচিত হইবে।]

টীকা। এই অধ্যায়ে, 'বীজগণিতীয় রাশিমালা (algebraical expression)' অর্থে '**মূলদ** (rational) এবং **পূর্ণ** বা **অখণ্ড** (integral) বীজগণিতীয় রাশিমালা' বুঝাইবে ; অর্থাৎ যে রাশিমালার কোন পদে মূলনির্ণয়সূচক মূল-চিহ্ন (radical sign)

বা যাহার কোন পদের হরে (denominator এ) কোন অক্ষর (letter) বর্ত্তমান নাই, সেইরূপ রাশিমালা বুঝাইবে ; আবার, রাশিমালার 'উৎপাদক' অর্থেও 'মূলদ ও পূর্ণ উৎপাদক'ই সূচিত হইবে।

92. সহজ বিশ্লেষণ : যে রাশিমালার প্রত্যেক পদে কোন একটি উৎপাদক সাধারণ (common) থাকে, তাহাকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই, একটি সরল (simple) ও একটি মিশ্র (compound), এইরূপ দুইটি উৎপাদকে অবিলম্বে বিশ্লেষণ করা যায়। যথা,

(1) $a^2x + ax^2 = ax.a + ax.x = ax(a + x)$;

তদ্রূপ, (2) $2a^3b^2 - 3a^2b^3 = a^2b^2(2a - 3b)$;

এবং (3) $24x^4a^3 - 40x^3a^4 + 56x^2a^5 = 8x^2a^3(3x^2 - 5xa + 7a^2)$.

প্রশ্নমালা 44

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $ab + ac$.
2. $a^2b^3 + a^3b^2$.
3. $x^3y^4 - 2x^4y^3$.
4. $2x^2yz + 4xy^2z - 6xyz^2$.
5. $4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3$.
6. $ax^2y - 5a^2x^3y^2 + 3ax^3$.
7. $3x^4y^3z^2 - 12x^2y^4z^3 + 21x^3y^2z^4$.
8. $28a^8b^5 - 42a^5b^8$.
9. $72x^{10}y^8 + 108x^8y^{10}$.
10. $39a^5b^7c^7 - 65b^5c^7a^7 - 91c^5a^7b^7$.

93. $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা : $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 56 নিয়মের টীকায় বর্ণিত হইয়াছে। শিক্ষার্থীদের অভ্যাসার্থ আরও কতিপয় প্রশ্ন নিম্নে সংযোজিত হইল।

প্রশ্নমালা 45

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

1. $9a^2 - 16b^2$.
2. $4a^3 - 25ax^2$.
3. $36x^4 - 1$.
4. $16x^4 - 1$.
5. $16x^5 - 9x$.
6. $16x^5 - 81x$.
7. $1 - 16a^4$.
8. $x^2 - 81x^6$.
9. $36 - x^4a^2$.
10. $64a^4 - 49x^6$.
11. $121 - m^6$.
12. $49x^6a^{10} - 81$
13. $a^2b^2 - 25c^2d^2$.
14. $81x^{12} - 64a^{10}$.
15. $p^2q^4 - 100p^2$
16. $144x^7 - 25x^3a^4$
17. $192a^9 - 243a^5x^4$

18. $98a^3x^5 - 128ax.$

19. $324x^{17}a^9 - 484x^5a^3.$

20. $245m^{23}n^{13} - 605m^{15}n^7.$

21. $(a+3b)^2 - 25c^2.$

22. $a^2 - (3b-5c)^2.$

23. $(x+y)^2 - (x-y)^2.$

24. $(3a+2x)^2 - (2a+x)^2.$

25. $4(a-b)^2 - 9(c-d)^2.$

26. $49x^2 - (5y-3z)^2.$

27. $(8x+5)^2 - (2x-7)^2.$

28. $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2.$

29. $(2a-3b+4c)^2 - (a+4b-5c)^2.$

30. $64(a+3x-4y)^2 - 9(2a-x+3y)^2.$

31. $(4x^2-5a^2)^2 - (5x^2-4a^2)^2.$

32. $(5a^2-3a+7)^2 - (5a^2-3a-7)^2.$

94. পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশ করা যায় এই প্রকার রাশিমালা : দৃষ্টান্তস্বরূপ নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^4 + a^2b^2 + b^4.$

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= \{(a^2+b^2) + ab\}\{(a^2+b^2) - ab\} \\ &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 + 4.$

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2+2) + 2x\}\{(x^2+2) - 2x\} \\ &= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2). \end{aligned}$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 - 6x^2 + 1.$

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = (x^2-1)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2-1) + 2x\}\{(x^2-1) - 2x\} \\ &= (x^2+2x-1)(x^2-2x-1). \end{aligned}$$

উদা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2bc - c^2 &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 - (b-c)^2 \\ &= \{a + (b-c)\}\{a - (b-c)\} \\ &= (a+b-c)(a-b+c). \end{aligned}$$

উদা: **5.** উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=(c+d)^2-(a-b)^2$$
$$=\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}$$
$$=(c+d+a-b)(c+d-a+b).$$

প্রশ্নমালা 46

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^4+x^2+1. **2.** x^8+x^4+1. **3.** $a^4+a^2x^2+x^4$.

4. $a^8+a^4x^4+x^8$. [কলি: প্রবেশিকা, 1887.] **5.** x^4+64.

6. $4x^4+81$. **7.** $9x^4+36$. **8.** a^4+2a^2+9.

9. x^4-7x^2+9. **10.** $4x^4+8x^2+9$. **11.** $4x^4-16x^2+9$.

12. $4x^4+3x^2+9$. **13.** $4a^4-37a^2+9$. **14.** $4a^4+625$.

15. $9x^4+23x^2+16$. **16.** $9a^4-25a^2+16$.

17. $9x^4-33x^2+16$. **18.** $9a^4-a^2+16$.

19. $16x^4+4x^2a^2+25a^4$ **20.** $9a^4-19a^2x^2+25x^4$.

21. x^4+8x^2+144. **22.** $a^4-35a^2b^2+25b^4$.

23. $36a^4-16a^2b^2+b^4$. **24.** $49m^4+16n^4-60m^2n^2$.

25. $64a^4+81x^4$. **26.** $4x^4+(7a)^4$.

27. $x^2-y^2+2yz-z^2$ **28.** $4a^2-b^2-9c^2+6bc$.

29. $9x^2-4y^2+12yz-9z^2$. **30.** $a^2-4b^2-25c^2+20bc$.

31. $30xz+16y^2-9x^2-25z^2$.

32. $a^2+4b^2-9c^2-4d^2-4ab+12cd$.

33. $(x^2-2xy)-(z^2-2yz)$.

34. $4x^2-1+9a^2-25b^2+12xa-10b$.

35. $9x^2-4y^2-49z^2-30x+28yz+25$.

36. $16a^2-16c^2-9b^2-24a+24bc+9$.

37. $49y^2+20z+x^2-14xy-25z^2-4$.

38. $16x^2+42by-9y^2+40xa-49b^2+25a^2$.

39. $49x^2-1+16y^2-64z^2+16z-56xy$.

40. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

95. a^3+b^3 বা a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা : এই প্রকার রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 59 এবং 60 নিয়মে বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে, এই আকারের অপেক্ষাকৃত একটু জটিল রাশি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^9+x^9.

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

অতএব,
$$\begin{aligned} a^9+x^9 &= (a^3)^3+(x^3)^3 \\ &= (a^3+x^3)\{(a^3)^2-(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3+x^3)(a^6-a^3x^3+x^6) \\ &= (a+x)(a^2-ax+x^2)(a^6-a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^9-x^9.

যেহেতু $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

অতএব,
$$\begin{aligned} a^9-x^9 &= (a^3)^3-(x^3)^3 \\ &= (a^3-x^3)\{(a^3)^2+(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3-x^3)(a^6+a^3x^3+x^6) \\ &= (a-x)(a^2+ax+x^2)(a^6+a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $64x^7-xa^6$.

$$\begin{aligned} 64x^7-xa^6 &= x(64x^6-a^6) \\ &= x\{(8x^3)^2-(a^3)^2\} \\ &= x(8x^3+a^3)(8x^3-a^3) \\ &= x\{(2x)^3+a^3\}\{(2x)^3-a^3\} \\ &= x\{(2x+a)(4x^2-2xa+a^2)\}\{(2x-a)(4x^2+2xa+a^2)\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2-2xa+a^2)(4x^2+2xa+a^2). \end{aligned}$$

অথবা,

$$\begin{aligned} 64x^7-xa^6 &= x(64x^6-a^6) \\ &= x\{(4x^2)^3-(a^2)^3\} \\ &= x(4x^2-a^2)(16x^4+4x^2a^2+a^4) \\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(16x^4+8x^2a^2+a^4)-4x^2a^2\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(4x^2+a^2)^2-(2xa)^2\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)(\overline{4x^2+a^2}+2xa)(\overline{4x^2+a^2}-2xa) \\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2+2xa+a^2)(4x^2-2xa+a^2). \end{aligned}$$

টীকা। উপরে প্রদর্শিত নিয়ম দুইটির যে কোনটির সাহায্যেই বিশ্লেষণ-ক্রিয়া সম্পন্ন করা যাইলেও, প্রথমোক্ত নিয়মটি প্রয়োগ করাই সুবিধাজনক।

প্রশ্নমালা 47

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

1. a^3-8b^3. **2.** a^4-27ax^3. **3.** $512x^9+1$.
4. a^9-512b^9. **5.** $27a^6+125x^6$. **6.** m^6-n^6.
7. $343x^3+512y^3$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.] **8.** $64x^{12}-1$.
9. a^6-64x^{12}. **10.** $125x^9-216a^9$. **11.** $64a^{13}b+343ab^{13}$.
12. $729x^{20}y^2-64x^2y^{20}$. **13.** $(a^2+b^2)^3+8a^3b^3$.
14. $(2x^2-3y^2)^3+y^6$. **15.** $(2a^3-b^3)^3-b^9$.

96. x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ এই অভেদটি (identity) হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, দুইটি রাশি, a ও b, এরূপে নির্ণয় করিতে হয় যে, $a+b=p$ এবং $ab=q$. a ও b মূলদ (rational) এবং অখণ্ড বা পূর্ণ (integral) হইলে, উহাদিগকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই নির্ণয় করা যাইতে পারে। এই বিষয়ের আরও পরিষ্কার ধারণার জন্য, শিক্ষার্থিগণ 60 নিয়মের পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দেখিয়া লইতে পারে।

উদা. 1. $x^2+17x+30$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $=17$, এবং গুণফল $=30$.

এখন, যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 30, তাহারা যথাক্রমে (i) 1 ও 30, (ii) 2 ও 15, (iii) 3 ও 10, (iv) 5 ও 6. ইহাদের মধ্যে পুনরায় যে যে সংখ্যা দুইটির যোগফল 17, সেই সংখ্যাদ্বয়কে নির্ণয় করিতে হইবে। স্পষ্টতঃ, 2 ও 15 সংখ্যা দুইটিই নির্ণেয় সংখ্যা ; কারণ, $2+15=17$ এবং $2\times 15=30$.

$$\text{অতএব,}\quad x^2+17x+30=(x+2)(x+15).$$

উদা. 2. $x^2-11x+24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, যে সংখ্যা দুইটির গুণফল $=+24$ এবং সমষ্টি $=-11$, তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব, ইহা সুস্পষ্ট যে, সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটিই ঋণাত্মক (কারণ,

উভয়ই ধনাত্মক হইলে, সমষ্টি ঋণাত্মক হইতে পারে না ; আবার, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইলেও, গুণফল ধনাত্মক হইতে পারে না)।

এখন, যে যে ঋণাত্মক সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= +24$, তাহারা যথাক্রমে (i) -1 ও -24, (ii) -2 ও -12, (iii) -3 ও -8, (iv) -4 ও -6. ইহাদের মধ্যে আবার সেই দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $= -11$. অতএব, -3 ও -8 ই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

$$\text{সুতরাং,}\quad x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8).$$

উদা. 3. $x^2 + 6x - 40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, যে সংখ্যা দুইটির গুণফল $= -40$ এবং সমষ্টি $= +6$, তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= -40$, তাহারা যথাক্রমে : (i) 1 ও -40, (ii) -1 ও 40, (iii) 2 ও -20, (iv) -2 ও 20, (v) 4 ও -10, (vi) -4 ও 10, (vii) 5 ও -8, (viii) -5 ও 8. ইহাদের মধ্যে, যে সংখ্যা দুইটির সমষ্টি $+6$, তাহারা স্পষ্টতঃ -4 ও $+10$. সুতরাং, -4 ও $+10$ ই নির্ণেয় সংখ্যা।

$$\text{অতএব,}\quad x^2 + 6x - 40 = (x-4)(x+10).$$

টীকা। পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল ধনাত্মক হইতে হইলে, উহাদের মধ্যে যেটির পরমমান (absolute value) বেশী, সেইটিই ধনাত্মক হইবে। এইটুকু মনে রাখিলে, প্রথমেই (i), (iii), (v) ও (vii) এ উল্লিখিত সংখ্যাদ্বয়কে বাদ দেওয়া যাইত।

উদা. 4. $x^2 - 5x - 36$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $= -5$ এবং গুণফল $= -36$. স্পষ্টতঃই, এইরূপ সংখ্যাদ্বয়ের একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইবে, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটি ধনাত্মকটি হইতে বড় হইবে। এখন, যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= -36$, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরমমান বেশী, তাহারা যথাক্রমে, (i) 1 ও -36, (ii) 2 ও -18, (iii) 3 ও -12, (iv) 4 ও -9 ; ইহাদের মধ্যে আবার যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি -5, সেই সংখ্যাদ্বয় স্পষ্টতঃই $+4$ ও -9 হইবে।

$$\text{অতএব,}\quad x^2 - 5x - 36 = (x+4)(x-9).$$

উদা. 5. $a^2 + 7ab + 12b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

দুইটি সংখ্যা p ও q যদি এরূপে নির্ণয় করা যায় যে, $p+q=7$ এবং $pq=12$, তাহা হইলে, নির্ণেয় উৎপাদক দুইটি স্পষ্টতঃ $a+pb$ এবং $a+qb$ হইবে।

পূর্ব্বানুরূপ যুক্তি অনুসারে সহজেই বুঝা যায় যে, 3 এবং 4 ই নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় হইবে ; কারণ, $3+4=7$ এবং $3\times 4=12$.

অতএব, $a^2+7ab+12b^2=(a+3b)(a+4b)$.

উদা. 6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $m^2-12mn+20n^2$.

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $=-12$ এবং গুণফল $=+20$. পূর্ব্বানুরূপ যুক্তি দ্বারা বুঝা যায় যে, -10 ও -2 ই নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় হইবে।

অতএব, $m^2-12mn+20n^2=(m-10n)(m-2n)$.

উদা. 7. a^4-a^2-12 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

a^2 এর পরিবর্ত্তে x ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $=x^2-x-12$; এবং পূর্ব্বপ্রদর্শিত নিয়মানুসারে, $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$.

অতএব, $a^4-a^2-12=(a^2-4)(a^2+3)$; ... ... (1)

আবার, $a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$.

সুতরাং, (1) হইতে, $a^4-a^2-12=(a+2)(a-2)(a^2+3)$.

উদা. 8. $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

x^2+2x এর পরিবর্ত্তে a ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $=a^2-3a-18$,

অতএব, $=(a-6)(a+3)$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\{(x^2+2x)-6\}\{(x^2+2x)+3\}$

$=(x^2+2x-6)(x^2+2x+3)$.

উদা. 9. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(5a+b)^2+(5a+b)(a+2b)-20(a+2b)^2.$$

$5a+b$ এর পরিবর্ত্তে x এবং $a+2b$ এর পরিবর্ত্তে y ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $x^2+xy-20y^2$ তে পরিণত হয় ; এবং স্পষ্টই, $x^2+xy-20y^2=(x+5y)(x-4y)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\{(5a+b)+5(a+2b)\}\{(5a+b)-4(a+2b)\}$

$=(10a+11b)(a-7b)$.

উদা. 10. $8x^2+2x-3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি : x^2 এর সহগ দ্বারা, রাশিমালার ধ্রুবক (constant term)টিকে [অর্থাৎ যে পদটিতে x, বা x এর কোন শক্তি নাই, সেইটিকে] গুণ কর।

এক্ষেত্রে, গুণফল $=8\times(-3)=-24$.

এখন, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল $=-24$ এবং সমষ্টি $=+2$, (অর্থাৎ x এর সহগ)। স্পষ্টই, নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 6 ও -4 হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= 8x^2 + 6x - 4x - 3 = 2x(4x+3) - (4x+3)$
$= (4x+3)(2x-1)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

প্রদত্ত রাশি $= 8x^2 + 2x - 3 = \frac{1}{8}(8 \times 8x^2 + 2 \times 8x - 3 \times 8)$
$= \frac{1}{8}(a^2 + 2a - 24)$; [$8x$ এর পরিবর্ত্তে a লিখিয়া]

স্পষ্টতঃ, $a^2 + 2a - 24 = (a+6)(a-4)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{8}(a+6)(a-4) = \frac{1}{8}(8x+6)(8x-4)$
$= \frac{1}{8}\{2(4x+3)\}\{4(2x-1)\} = (4x+3)(2x-1)$.

উদা. 11. $12x^2 + 7x - 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ x^2 এর সহগ দ্বারা রাশিমালার ধ্রুবক-(constant term)টিকে (অর্থাৎ x-বর্জ্জিত পদটিকে) গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ হইবে।

এক্ষেত্রে, গুণফল $= 12 \times (-10) = -120$; এবং পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় যে, যে দুইটি সংখ্যার গুণফল $= -120$ এবং বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ, অর্থাৎ $+7$, তাহারা $+15$ এবং -8 হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= 12x^2 + 15x - 8x - 10 = 3x(4x+5) - 2(4x+5)$
$= (4x+5)(3x-2)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{12}(12 \times 12x^2 + 7 \times 12x - 10 \times 12)$
$= \frac{1}{12}(a^2 + 7a - 120)$; [$12x$ এর পরিবর্ত্তে a লিখিয়া]

স্পষ্টই, $a^2 + 7a - 120 = (a+15)(a-8)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{12}(12x+15)(12x-8) = \frac{1}{12}\{3(4x+5)\}\{4(3x-2)\}$
$= (4x+5)(3x-2)$.

উদা. 12. $13x^2 - 20ax + 7a^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ রাশিমালার x-বর্জ্জিত পদটিকে x^2 এর সহগ দ্বারা গুণ কর। এক্ষেত্রে, গুণফল $= 13 \times 7a^2 = 91a^2$; এখন $91a^2$ কে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর; যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ, অর্থাৎ $-20a$ হইবে।

স্পষ্টই দেখা যায় যে, নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় $-7a$ এবং $-13a$ হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= 13x^2 - 13ax - 7ax + 7a^2$
$= 13x(x-a) - 7a(x-a) = (x-a)(13x-7a)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

প্রদত্ত রাশি $= 13x^2 - 20ax + 7a^2$

$= \frac{1}{13}(13 \times 13x^2 - 20a \times 13x + 13 \times 7a^2)$

$= \frac{1}{13}(y^2 - 20ay + 91a^2)$ [$13x$ এর পরিবর্তে y লিখিয়া]

$= \frac{1}{13}(y^2 - 13ay - 7ay + 91a^2)$

$= \frac{1}{13}\{y(y - 13a) - 7a(y - 13a)\}$

$= \frac{1}{13}(y - 13a)(y - 7a)$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{13}(13x - 13a)(13x - 7a) = \frac{1}{13} \times 13(x - a)(13x - 7a)$

$= (x - a)(13x - 7a)$.

প্রশ্নমালা 48

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

1. $x^2 + 3x + 2$. **2.** $x^2 + 5x + 6$. **3.** $a^2 + 4a + 3$.
4. $x^2 - 5x + 4$. **5.** $x^2 + 7x + 10$. **6.** $x^2 - 7x + 12$.
7. $x^2 + 8x + 15$. **8.** $x^2 - 2x - 15$. **9.** $x^2 - 13x + 36$.
10. $x^2 - 5x - 36$. **11.** $x^2 - 14x + 24$. **12.** $x^2 - 22x + 40$.
13. $x^2 + 7x - 30$. **14.** $x^2 + 2x - 48$. **15.** $x^2 + 16x - 36$.
16. $x^2 + 9x - 36$. **17.** $x^2 + 11x - 42$. **18.** $x^2 + 14x - 72$.
19. $x^2 - 3x - 40$. **20.** $x^2 - 11x - 80$. **21.** $x^2 - 29x - 96$.
22. $x^2 - 10x - 56$. **23.** $x^2 - x - 42$. **24.** $x^2 - x - 72$.
25. $x^2 + 22x + 120$. **26.** $x^2 + 16x - 80$. **27.** $x^2 - 21x - 72$.
28. $x^2 + 5x - 84$. **29.** $x^2 - 20x + 96$. **30.** $x^2 + 23x - 78$.
31. $x^2 - 6x - 72$. **32.** $x^2 - 25x + 84$. **33.** $x^2 - 26x + 88$.
34. $x^2 + 7x - 120$. **35.** $x^2 - 2x - 80$. **36.** $x^2 + 8x - 84$.
37. $a^2 - a - 56$. **38.** $m^2 - 9m - 90$. **39.** $a^2 + 17a - 60$.
40. $a^2 - 15a + 54$. **41.** $p^2 - 22p - 48$. **42.** $m^2 + m - 72$.
43. $m^2 + 27m - 90$. **44.** $a^2 - 29a + 120$. **45.** $x^2 + 7x - 78$.
46. $a^2 - 49a - 102$. **47.** $a^2 - 19a + 60$. **48.** $x^2 + 12x - 64$.
49. $a^2 - 26a - 120$. **50.** $x^2 + 8x - 105$. **51.** $x^2 - xy - 42y^2$.
52. $a^2 - 12ab + 32b^2$. **53.** $m^2 + mn - 30n^2$. **54.** $a^2 + ab - 12b^2$.
55. $a^2 - 2ab - 15b^2$. **56.** $x^2 - 7xy - 8y^2$. **57.** $x^2 + 3xy - 40y^2$.
58. $p^2 - 14pq + 48q^2$. **59.** $p^2 + 2pq - 80q^2$. **60.** $x^2 + 20xy - 96y^2$

61. $a^4+4a^2-5.$ **62.** $x^4+2x^2-15.$ **63.** $x^4+3x^2-28.$

64. $x^6+2x^3-3.$ **65.** $a^6-10a^3+16.$ **66.** $x^6+26x^3-27.$

67. $a^6+7a^3-8.$ **68.** $x^8-20x^4+64.$ **69.** $a^8-11a^4-80.$

70. $x^{12}-7x^6-8.$ **71.** $(a^2+2a)^2-(a^2+2a)-2.$

72. $(x^2+3x)^2+3(x^2+3x)+2.$ **73.** $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3.$

74. $(a^2-3a)^2-3(a^2-3a)-4.$ **75.** $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5.$

76. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12.$ **77.** $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24.$

78. $(a^2+7a)^2-8(a^2+7a)-180.$ **79.** $(a^2+6a)^2-32(a^2+6a)-320.$

80. $(x^2-8x)^2-29(x^2-8x)+180.$ **81.** $2x^2+x-15.$

82. $6a^2-a-15.$ **83.** $8m^2-6m-9.$ **84.** $6x^2+7xy-24y^2.$

85. $10a^2-41ab+21b^2.$ **86.** $12m^2-mn-20n^2.$

87. $12x^2+28xy-5y^2.$ **88.** $20a^2+ab-30b^2.$

89. $18x^2-51xy+35y^2.$ **90.** $12x^2+23xy-24y^2.$

79. x^2+px+q এর আকারে প্রকাশ করা যায়, এই প্রকার রাশিসমূহকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়ঃ

কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা উক্ত প্রণালী উত্তমরূপে বুঝান যাইবে।

উদা. 1. $x^2-7x+12$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^2-7x+12=x^2-7x+(\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+12$ [$(\frac{7}{2})^2$ কে যোগ এবং বিয়োগ করিয়া]

$=\{x^2-7x+(\frac{7}{2})^2\}-(\frac{49}{4}-12)=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$

$=\{(x-\frac{7}{2})+\frac{1}{2}\}\{(x-\frac{7}{2})-\frac{1}{2}\}=(x-3)(x-4).$

টীকা। ইহা অবশ্যই লক্ষ্য করিতে হইবে যে, একটি পূর্ণ বর্গ পাইবার জন্য, আমরা x^2-7x এর সহিত 7 এর অর্দ্ধেকের বর্গ (অর্থাৎ, x এর সহগের অর্দ্ধেকের বর্গ) যোগ করিয়াছি। সাধারণতঃ, x^2+2ax (অথবা x^2-2ax) এর সহিত a^2 যোগ করিলে, এতল্লব্ধ রাশিমালা (অর্থাৎ যোগফলটি) একটি পূর্ণ বর্গ হইবে।

উদা. 2. $x^2+2xy-8y^2-4z^2+12yz$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2+2xy+y^2)-(9y^2+4z^2-12yz)$

$=(x+y)^2-(3y-2z)^2$

$=\{(x+y)+(3y-2z)\}\{(x+y)-(3y-2z)\}$

$=(x+4y-2z)(x-2y+2z).$

উদা. 3. $3x^2+11x-4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$3x^2+11x-4=3(x^2+\tfrac{11}{3}x-\tfrac{4}{3})=3\{x^2+\tfrac{11}{3}x+(\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{4}{3}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{121}{36}+\tfrac{4}{3})\}=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{169}{36}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})+\tfrac{13}{6}\}\{(x+\tfrac{11}{6})-\tfrac{13}{6}\},\quad [\because\ \tfrac{169}{36}=(\tfrac{13}{6})^2]$$
$$=3(x+4)(x-\tfrac{1}{3})=(x+4)(3x-1).$$

উদা. 4. $8x^2-10x+3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$8x^2-10x+3=8\{x^2-\tfrac{10}{8}x+\tfrac{3}{8}\}=8\{x^2-\tfrac{5}{4}x+(\tfrac{5}{8})^2-(\tfrac{25}{64}-\tfrac{3}{8})\}$$
$$=8\{(x-\tfrac{5}{8})^2-\tfrac{1}{64}\}=8\{(x-\tfrac{5}{8})+\tfrac{1}{8}\}\{(x-\tfrac{5}{8})-\tfrac{1}{8}\}$$
$$=8(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{3}{4})=\{2(x-\tfrac{1}{2})\}\{4(x-\tfrac{3}{4})\}$$
$$=(2x-1)(4x-3).$$

উদা. 5. $2a^2+5ab-12b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$2a^2+5ab-12b^2=2(a^2+\tfrac{5}{2}ab-6b^2)$$
$$=2\left\{a^2+\frac{5}{2}ab+\left(\frac{5b}{4}\right)^2-\left(\frac{25b^2}{16}+6b^2\right)\right\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)^2-\tfrac{121}{16}b^2\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)+\tfrac{11}{4}b\}\{(a+\tfrac{5}{4}b)-\tfrac{11}{4}b\}$$
$$=2(a+4b)(a-\tfrac{3}{2}b)=(a+4b)(2a-3b).$$

উদা. 6. $ax^2+(a^2+1)x+a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$ax^2+(a^2+1)x+a$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}.x+1\right\}$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}.x+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2}-1\right)\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)+\frac{a^2-1}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)-\frac{a^2-1}{2a}\right\}$$
$$=a(x+a)\left(x+\frac{1}{a}\right).$$
$$=(x+a)(ax+1).$$

এইরূপভাবে, প্রমাণ করা যাইতে পারে যে,

$$ax^2-(a^2+1)x+a=(x-a)(ax-1),$$
$$ax^2+(a^2-1)x-a=(x+a)(ax-1),$$
$$ax^2-(a^2-1)x-a=(x-a)(ax+1).$$

টীকা। এই ফলগুলি মনে রাখা অবশ্যকর্ত্তব্য ; কারণ, ইহাদের সাহায্যে আমরা উপরোক্ত রাশিসমূহের অনুরূপ আকারের যে কোন রাশিরই উৎপাদক অবিলম্বে লিখিতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$,

$$4x^2-15x-4=(x-4)(4x+1),$$

$$5x^2+24x-5=(x+5)(5x-1)\text{ ; ইত্যাদি।}$$

উদা. 7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2.$$

x^2+2x+5 এর পরিবর্ত্তে a এবং x^2+6x এর পরিবর্ত্তে b লিখিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা $=4a^2+17ab+4b^2$; এবং ইহা সহজেই দেখান যায় যে,

$$4a^2+17ab+4b^2=(a+4b)(4a+b).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\{(x^2+2x+5)+4(x^2+6x)\}\{4(x^2+2x+5)+(x^2+6x)\}$$
$$=(5x^2+26x+5)(5x^2+14x+20)$$
$$=(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20).$$

প্রশ্নমালা 49

পূর্ব্বোক্ত নিয়মানুসারে, নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^2+4x+3. **2.** x^2+6x+5. **3.** $x^2+8x+15$.
4. $x^2-10x+21$. **5.** $x^2-2x-48$. **6.** $x^2-4x-45$.
7. $x^2-12x+32$. **8.** $x^2-6x-55$. **9.** $a^2+2ab-c^2+2bc$.
10. x^2+2x-y^2+2y. **11.** x^2+6x-y^2+4y+5.
12. $a^2+4ab-5b^2-c^2+6bc$. **13.** $x^2-6xy+5y^2-z^2+4yz$.
14. $x^2-10xy+16y^2-4z^2+12yz$. **15.** $a^2-12ab-13b^2-9c^2+42bc$.
16. $x^2+12xy-9z^2+36yz$. **17.** $x^2-14xy-15y^2-25z^2+80yz$.
18. $2x^2-5x-3$. **19.** $3x^2-5x-2$. **20.** $3x^2+14x+8$.
21. $4x^2+7x-2$. **22.** $6x^2+x-2$. **23.** $6x^2-5x-4$.
24. $6x^2+7x-3$. **25.** $8x^2+2x-15$. **26.** $4x^2+4x-35$.
27. $6x^2-x-12$. **28.** $3x^2-16x-12$. **29.** $2x^2-9x-35$.
30. $2x^2+5x-42$. **31.** $3x^2+13x-30$. **32.** $12x^2+x-6$.
33. $2a^2+7ab-15b^2$. **34.** $6x^2-13xy+6y^2$.

35. $6m^2 - 11mn - 10n^2$.
36. $3p^2 + 5pq - 12q^2$.
37. $8a^2 - 14ab - 15b^2$.
38. $10m^2 + 11mn - 6n^2$.
39. $12x^2 + 13xy - 4y^2$.
40. $15a^2 - 11ab - 12b^2$.
41. $2a^2 - 5ab + 2b^2$.
42. $3a^2 - 8ab - 3b^2$.
43. $3x^2 + 8xy - 3y^2$.
44. $4a^2 + 15a - 4$.
45. $4a^2 - 17ab + 4b^2$.
46. $5x^2 - 24x - 5$.
47. $5x^2 - 26xy + 5y^2$.
48. $6x^2 + 37x + 6$.
49. $6a^2 + 35ab - 6b^2$.
50. $6a^2 - 35ab - 6b^2$.
51. $7a^2 - 50ab + 7b^2$.
52. $7a^2 + 48ab - 7b^2$.
53. $7a^2 - 48ab - 7b^2$
54. $8x^2 + 63xy - 8y^2$.
55. $9x^2 - 82xy + 9y$
56. $10x^2 + 99xy - 10y^2$.
57. $2(a+b)^2 + 3(a+b) - 2$.
58. $2(x^2+y^2)^2 - 3xy(x^2+y^2) - 2x^2y^2$.
59. $2(a^2+b^2)^2 + 5ab(a^2+b^2) + 2a^2b^2$.
60. $4(x^2 - 4xy + y^2)^2 + 15xy(x^2 - 4xy + y$
61. $2x^4 - 5x^2 - 12$.
62. $8a^4 - 14a^2b^2 - 9b^4$.
63. $9a^4 + 2a^2b^2 - 32b^4$.
64. $8x^6 - 65x^3 + 8$.
65. $4a^8 - 17a^4b^4 + 4b^8$.

ত্রয়োদশ অধ্যায়

সহজ অভেদাবলী (Easy Identities)

98. 62 নিয়মে **'অভেদ** (identity)' কাহাকে বলে, তাহা ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বস্তুতঃ, সমতাচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ দুইটি রাশির সমতা যদি রাশিদ্বয়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানেরই জন্য রক্ষিত হয়, তবে ঐরূপ সমতাকে 'অভেদ' বলে; এবং রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে ঐ অভেদের **পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলে। যথা,

$5x = 2x + 3x$ একটি অভেদ; কারণ, $5x$ এবং $2x + 3x$ এই রাশি দুইটি, x এর সকল প্রকার মানের জন্যই, পরস্পর সমান। $5x$ এবং, $2x + 3x$ এই রাশিদ্বয়কে অভেদটির পার্শ্ব বা পক্ষ বলে; $5x$ কে বাম পক্ষ (left-hand member) এবং $2x + 3x$ কে ডা'ন পক্ষ (right-hand member) বলা হয়।

তদ্রূপ, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ একটি অভেদ ; কারণ, a ও b এর সকল প্রকার মানের জন্যই ঐ সমতা বজায় থাকে। বস্তুতঃ, চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত সকল সূত্র (formula)ই এক একটি অভেদ।

99. অভেদের দুই পার্শ্বস্থিত রাশিদ্বয়ের সমতা প্রতিপন্ন করিতে পারিলেই অভেদটি প্রতিষ্ঠিত (established) হইল, বলা হয়।

অভেদ প্রতিষ্ঠিত করিতে হইলে, উহার পার্শ্বদ্বয়কে সরল করিয়া প্রমাণ করিতে হয় যে, উহারা পরস্পর সমান। একাদশ অধ্যায়ে বর্ণিত সূত্রাবলীর সাহায্যে, পক্ষদ্বয়ের যে কোনটিকে, সরল-করণ এবং রূপান্তর-করণ প্রক্রিয়া দ্বারা (by simplification and transformation) অপরটিতে পরিণত করাই উৎকৃষ্টতর পদ্ধতি।

কোন কোন সময়ে, অভেদের পার্শ্বদ্বয়স্থিত পদসমূহের কতিপয়ের পরিবর্ত্তে একটি অক্ষর লিখিয়া অভেদটিকে প্রয়োজন মত সরল আকারে প্রকাশ করা যায়। আবশ্যক হইলেই, এইরূপভাবে প্রকাশ করা কর্ত্তব্য।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী উত্তমরূপে বুঝিতে পারা যাইবে :

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(a+3b)^2 + (a-3b)^2 = 2a^2 + 18b^2$.

বাম পক্ষ $= (a^2 + 6ab + 9b^2) + (a^2 - 6ab + 9b^2)$ [নিয়ম 54 ও 55]

$= 2a^2 + 18b^2$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \tfrac{1}{2}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2].$$

বাম পক্ষ $= \frac{1}{2}[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca]$

$= \frac{1}{2}[(a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2) - 2ab - 2bc - 2ca]$

$= \frac{1}{2}[(b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) + (a^2 - 2ab + b^2)]$

$= \frac{1}{2}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$. [নিয়ম 55]

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$(x+5y-3z)^3 + (x-5y+3z)^3 + 6x(x+5y-3z)(x-5y+3z) = 8x^3.$$

$x+5y-3z$ এর পরিবর্ত্তে a, এবং $x-5y+3z$ এর পরিবর্ত্তে b ধরিয়া, দেখা যায় যে,

বাম পক্ষ $= a^3 + b^3 + 6x.ab$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

[যেহেতু, $a + b = (x+5y-3z) + (x-5y+3z) = 2x$]

$= (a+b)^3$ [নিয়ম 57]

$= (2x)^3 = 8x^3$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0.$

$$\text{বাম পক্ষ} = (b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2) \quad [\text{নিয়ম } 56]$$
$$= b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2$$
$$= 0.$$

উদা. 5. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1902]

$$as+bc = a(a+b+c)+bc$$
$$= a^2+a(b+c)+bc = a^2+ab+ac+bc$$
$$= a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c). \quad [\text{নিয়ম } 61]$$

এইরূপভাবে, $bs+ca=b(a+b+c)+ca=b^2+b(a+c)+ac$
$$= b^2+ab+bc+ac=(b+c)(b+a);$$

এবং $cs+ab=c(a+b+c)+ab=c^2+c(a+b)+ab$
$$= c^2+ca+cb+ab=(c+a)(c+b).$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$
$$= (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

উদা. 6. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=s(s-2a)(s-2b)(s-2c).$$

$$\text{বাম পক্ষ} = (2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$= \{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$= \{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2+b^2-2ab)\}$$
$$= \{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a-b)$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$
$$= (a+b+c)(a+b+c-2c)(c+a+b-2b) \times (b+c+a-2a)$$
$$= s(s-2c)(s-2b)(s-2a)$$
$$= s(s-2a)(s-2b)(s-2c).$$

7. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$$

এখন, $c=2s-(a+b)=(s-a)+(s-b).$

অতএব, $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c$

$$=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)\{(s-a)+(s-b)\}$$
$$=\{(s-a)+(s-b)\}^3=c^3.$$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

$x-y$ এর পরিবর্তে a, $y-z$ এর পরিবর্তে b এবং $z-x$ এর পরিবর্তে c ধরিয়া, দেখা যায় যে, $a+b+c=0$.

অতএব, $\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$$-\{2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)-\{2a(-c)+2b(-a)+2c(-b)\}$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ac+2ab+2bc=(a+b+c)^2=0\ ;$$

$\therefore\quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

উদা. 9. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$$2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

যেহেতু, $2x+2y+2z=(x+y)+(y+z)+(z+x)$;

অতএব, $2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)$

$$=\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)\}+\{(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}$$
$$+\{(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)\}.$$

এখন, $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)=(s-b)\{(s-a)+(s-c)\}$

$$=(s-b)\{2s-a-c\}=(s-b)b.$$

এইরূপভাবে, $(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=(s-c)c$,

এবং $(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)=(s-a)a$,

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=(s-b)b+(s-c)c+(s-a)a=s(b+c+a)-b^2-c^2-a^2$

$$=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

উদা. 10. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

যেহেতু, $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3$

$$=a^3+b^3-\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}\quad [\text{নিয়ম } 57]$$
$$=-3ab(a+b)=3ab\{-(a+b)\}=3abc.$$

টীকা। স্পষ্টতঃ, $a+b+c=0$ হইলেই, $a^3+b^3+c^3=3abc$ অভেদটি সত্য হয়। এইরূপ, যে সকল অভেদাবলী, তৎসংশ্লিষ্ট প্রতীকসমূহের কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট মানের জন্যই কেবলমাত্র সত্য হয়, তাহাদিগকে **সাপেক্ষ অভেদাবলী** (conditional identities) বলে।

উদা. 11. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$$ [এলাহাবাদ, 1923.]

যেহেতু, $a+b+c=0$, অতএব পক্ষান্তর করিয়া,

$$a=-(b+c),\ b=-(c+a),\ c=-(a+b);$$

$\therefore\quad a^2+ab+b^2=\{-(b+c)\}^2+\{-(b+c)\}b+b^2,$ [যেহেতু $a=-(b+c)$]

$$=(b+c)^2-(b+c)b+b^2$$
$$=b^2+2bc+c^2-b^2-bc+b^2$$
$$=b^2+bc+c^2.$$

আবার, $a^2+ab+b^2=a^2+a\{-(c+a)\}+\{-(c+a)\}^2,$ [যেহেতু $b=-(c+a)$]

$$=a^2-a(c+a)+(c+a)^2$$
$$=a^2-ca-a^2+c^2+2ca+a^2$$
$$=c^2+ca+a^2.$$

অতএব, $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$

অন্য পদ্ধতি :

$$a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2=\{-(b+c)\}(-c)+b^2=(b+c)c+b^2$$
$$=bc+c^2+b^2=b^2+bc+c^2.$$

আবার, $b^2+bc+c^2=b(b+c)+c^2=\{-(c+a)\}(-a)+c^2$

$$=(c+a)a+c^2=ca+a^2+c^2=c^2+ca+a^2.$$

অতএব, $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$

উদা. 12. $x=b-c+a,\quad y=c-a+b$ এবং $z=a-b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(b-a)x+(c-b)y+(a-c)z=0.$

এখন, $(b-a)x=(b-a)(b-c+a)=(b-a)\{(b+a)-c\}$

$$=(b-a)(b+a)-(b-a)c=b^2-a^2-bc+ac;$$ [নিয়ম 56]

$$(c-b)y=(c-b)(c-a+b)=(c-b)\{(c+b)-a\}$$
$$=(c-b)(c+b)-(c-b)a=c^2-b^2-ca+ab;$$
$$(a-c)z=(a-c)(a-b+c)=(a-c)\{(a+c)-b\}$$
$$=(a-c)(a+c)-(a-c)b=a^2-c^2-ab+bc;$$

$\therefore \quad (b-a)x+(c-b)y+(a-c)z$
$= b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2-bc+ac-ca+ab-ab+bc=0.$

উদা. 13. $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

বাম পক্ষ $=\frac{1}{2}[2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy]$
$=\frac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$ [পদগুলিকে সাজাইয়া]
$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ [নিয়ম 55]
$=\frac{1}{2}[\{(b+c)-(c+a)\}^2+\{(c+a)-(a+b)\}^2+\{(a+b)-(b+c)\}^2]$ [x, y, z এর মান বসাইয়া]
$=\frac{1}{2}[(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2]$
$=\frac{1}{2}[(b^2-2ba+a^2)+(c^2-2cb+b^2)+(a^2-2ac+c^2)]$ [নিয়ম 55]
$=\frac{1}{2}[(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)]$ [সরল করিয়া]
$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

. 14. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2.$ [এলাহাবাদ, 1926.]

বাম পক্ষ $=(s^2-2as+a^2)+(s^2-2bs+b^2)+(s^2-2cs+c^2)+s^2$
$=4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$
$=4s^2-2s\times 2s+a^2+b^2+c^2$
$=4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$

প্রশ্নমালা 50

দেখাও যে :

1. $(a^2+ax-x^2)(a^2-ax+x^2)=a^4-a^2x^2+2ax^3-x^4.$
2. $(a^2-ax+x^2)(ax-a^2+x^2)=x^4-a^2x^2+2a^3x-a^4.$
3. $(a+b+c)(a-b-c)+(b+c-a)(a-b+c)=2b(a-b-c).$
4. $2(x^3-x)+3x(x+1)=x(x+1)(2x+1).$
5. $x^4+x+x(x+1)(2x+1)-2x(x+1)=x^2(x+1)^2.$
6. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$
7. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a+b+c+d)(a-d).$
8. $(a+b+c-d)(d-a-b+c)=c^2-(a+b-d)^2.$

9. $(b+c)^2 - a^2$ এবং $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ এর গুণফল $2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

10. $(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 - (b+c-a)^2 = 8ac$.

প্রমাণ কর যে :

11. $(a^2+b^2+c^2)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 - (a^2-b^2+c^2)^2 + (a^2+b^2-c^2)^2 = 8a^2b^2$.

12. $(b-c+d+a)(d+a-b+c) + (c-d+a+b)(b+c+d-a) = 4(ad+bc)$.

13. $(b+c+a-d)(b+c-a+d) = 2(ad+bc) - (a^2-b^2-c^2+d^2)$.

14. $4(ad+bc)^2 - (a^2-b^2-c^2+d^2)^2 = (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$.

15. $(x-y+z)^2 + (y-z+x)^2 + (z-x+y)^2 + 2(x-y+z)(y-z+x) + 2(y-z+x)(z-x+y) + 2(z-x+y)(x-y+z) = (x+y+z)^2$.

16. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = (ay-bx)^2 + (cx-az)^2 + (bz-cy)^2$.

17. $(a+c)^3 - (b+c)^3 - 3(a+c)(b+c)(a-b) = (a-b)^3$.

18. $(x-ay+bz)^3 + (x+ay-bz)^3 + 6x(x-ay+bz)(x+ay-bz) = 8x^3$.

19. $4(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + 2(a+b)(b+c) + 2(b+c)(c+a) + 2(c+a)(a+b)$.

20. $8(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + (b+2c+a)^3 + 6(a+b)(b+2c+a)(a+b+c)$.

21. $27(a+b+c)^3 = (a+3b+2c)^3 + (2a+c)^3 + 9(a+3b+2c)(2a+c)(a+b+c)$.

22. $s = a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$(s-3a)^2 + (s-3b)^2 + (s-3c)^2 = 3\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$.

23. $ab+bc+ca = 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2$;

(ii) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2abc(a+b+c)$.

24. $2s = x+y+z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4y^2z^2 - (y^2+z^2-x^2)^2 = 16s(s-x)(s-y)(s-z).$$

25. প্রমাণ কর যে,

$(x+2y+19z)^3 + (x-2y-19z)^3 + 6x(x+2y+19z)(x-2y-19z) = (5x+6y-z)^3 + (z-6y-3x)^3 + 6x(5x+6y-z)(z-6y-3x)$.

26. প্রমাণ কর যে,

$$(a+2b+3c)^2+(a-b-3c)^2+2(a+2b+3c)(a-b-3c)$$
$$=(3a+y+z)^2+(a+y+z-b)^2-2(3a+y+z)(a+y+z-b).$$

27. দেখাও যে, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$

28. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^2-(y-z)(z-x)$
$$=(y-z)^2-(z-x)(x-y)$$
$$=(z-x)^2-(x-y)(y-z)$$
$$=-\{(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)\}.$$

29. প্রমাণ কর যে, $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=2(b-c)(c-a),$
$$(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)^2=2(c-a)(a-b),$$
$$(c-a)^2-(a-b)^2-(b-c)^2=2(a-b)(b-c).$$

30. প্রমাণ কর যে, $(a-b)^2+(a-b)(b-c)+(b-c)^2$
$$=(b-c)^2+(b-c)(c-a)+(c-a)^2$$
$$=(c-a)^2+(c-a)(a-b)+(a-b)^2.$$

বিবিধ প্রশ্নমালা III

I

1. নিম্নলিখিত রাশিমালাকে (i) y এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে, (ii) z এর ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে, সাজাও :

$$x^3z+xy^3-x^3y-xy^2z-xz^3+xyz^2-2yz^3-2y^3z.$$

2. $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=2$ হইলে,

$$\frac{4y}{5}(y-x)-35\left[\frac{3x-4y}{5}-\frac{1}{10}\left\{3x-\frac{5}{7}\left(7x-4y\right)\right\}\right]$$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p.$

4. x^5-y^5 কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল কত হয়, লিখ।

5. $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(b+c-a)^2$ কে সরল কর এবং $a=b=c=-4$ হইলে, ইহার মান নির্ণয় কর।

6. $x^2-(x-y+z)(x+y-z)$, $y^2-(y-x+z)(y+x-z)$ এবং $z^2-(z-x+y)(z+x-y)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

7. $(a-b+c+d)(a+b+c-d)$ কে A^2-B^2 এর আকারে পরিবর্ত্তন কর।

8. $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

II

1. এরূপ একটি রাশি নির্ণয় কর, যাহা $ax^3+bx^2y+3cxy^2+dy^3$ হইতে যত বড়, $2ax^3+\frac{1}{4}(3a-b)x^2y+\frac{3}{4}(3a-c)xy^2+5dy^3$ এর চতুর্গুণ হইতে তত ছোট।

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের সমষ্টিকে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$(b-1)m^4+am^3+(c-b)m^2-bm-2,\ am^3-(c-a)m^2+(a+b)m+1$ এবং $(a-b+1)m^4-(2a-b)m^3+(a+b)m^2-(a-2b)m+1$.

3. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ কে $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ দ্বারা গুণ কর।

4. প্রমাণ কর যে, $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(x^2+y^2).$$

5. $x-a, x-b$ ও $x-c$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহা হইতে দেখাও যে, $$(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27.$$

6. $x^5-px^4+qx^3-qx^2+px-1$ কে $x-1$ দ্বারা ভাগ কর।

7. $a^6+a^5b-a^3b^3+ab^5+b^6$ ও a^2-ab+b^2 এর গুণফলকে $a^4-a^2b^2+b^4$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ইহা $(a^2+b^2)^2$ হইতে a^2b^2 পরিমিত ছোট।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $ab-ac-b^2+bc$; (ii) $b^2-12ac-4a^2-9c^2$

$(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})x^3+(\sqrt{bc}-\sqrt{ca}+\sqrt{ab})x^2+(\sqrt{abc}-2m+n)x+3u$, $(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})x^3+(\sqrt{ca}-\sqrt{ab}+\sqrt{bc})x^2+(\sqrt{abc}-2n+m)x+2(v-u)$ এবং $(p-2\sqrt{b})x^3+(q-2\sqrt{bc})x^2+(m+n+r-2\sqrt{abc})x+(s-u-2v)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

2. $a(a^2+b^2)$ হইতে $3a^3-5a^2b+2b^3$, $8a^2b-3b^3+2ab^2$, $5ab^2-4a^3-3a^2b$ এবং $2a^3-6ab^2+4b^3$ এর সমষ্টি বিয়োগ কর।

3. $a+b=8$ এবং $ab=5$ হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

4. $a=89$, $b=-69$, $c=8$ হইলে, $49c^2+9(a+b)^2-42(a+b)c$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ কে y^2-xz-z^2+xy দ্বারা ভাগ কর।

6. $4a-3+16a^2+64a^3$ কে $(A-B)+(A^2-B^2)+(A^3-B^3)$ এর আকারে পরিবর্ত্তিত করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. দেখাও যে, $(1+x+x^2)^2-(1-x+x^2)^2=4x(1+x^2)$.

8. $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$ হইলে, দেখাও যে, $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+(s-a_3)^2+\cdots\cdots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2$.

IV

1. $p=-m$ এবং $q=l$ ধরিয়া লইয়া, $(l^2r-3lmn+2m^3)p^3+3(lmr+m^2n-2ln^2)p^2q+3(2m^2r-lnr-mn^2)pq^2+(3mnr-lr^2-2n^3)q^3$কে সরল কর।

2. $\frac{1}{3}a^3x^4+5{\cdot}7a^2bx^3-3{\cdot}257ab^2x^2+\frac{5}{8}b^3x+9$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল, $4{\cdot}7a^2bx^3-{\cdot}007ab^2x^2+2\frac{2}{3}b^3x-5\frac{2}{3}a^3x^4+6$, $5\frac{1}{3}b^3x-3\frac{1}{3}a^2bx^3+a^3x^4-{\cdot}05ab^2x^2+11$ এবং $2a^3x^4-1\frac{2}{3}a^2bx^3-6{\cdot}2ab^2x^2-10\frac{1}{3}b^3x-20$ এর সমষ্টির সমান হইবে ?

3. $a^{\frac{5}{2}}-2a^2b^{\frac{1}{3}}+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-8ab+16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-32b^{\frac{5}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

4. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও :

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$; (ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;

(iii) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

5. $x+a$, $x+b$ এবং $x+c$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে $(x-7)(x+8)(x-12)$ তে x^2 এবং x এর সহগ দুইটি নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $(ab+cd+ac+bd)(ab+cd-ac-bd)$
$=a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2$.

7. $a=q+r+s$, $b=r+s-p$ এবং $c=p+q+r$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=r^2$.

8. $a^3+8b^3+27c^3-18abc$ কে $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ দ্বারা ভাগ কর।

1. $a=46$, এবং $b=-37$ হইলে, $49a^2+126ab+81b^2$ এর মান নির্ণয়

2. এমন একটি রাশিমালা নির্ণয় কর, যাহা $bx^4y - dx^2y^3 - fy^5$ হইতে যত ছোট, $ax^5 + cx^3y^2 + exy^4$ হইতে ঠিক তত বড়।

3. $2s = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,

$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4. সরল কর : $(5a-7c)^3 + (8c-3a)^3 + 3(2a+c)(5a-7c)(8c-3a)$.

5. $(2x^3 - x^2 + 3x - 4)(2x^3 + x^2 + 3x + 4) + (2x^3 + x^2 - 3x + 4) \times (2x^3 + x^2 + 3x - 4)$ কে হ্রস্ব আকারে প্রকাশ কর।

6. দেখাও যে, $\dfrac{x^8 + x^4 + 1}{x + \sqrt{x} + 1} = (x - \sqrt{x} + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

7. $a - b$ কে $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$ দ্বারা ভাগ কর।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $6a^4x^2 + a^3x - 6a^3x^3 - a^2x^2$; (ii) $xy(1 + z^2) + z(x^2 + y^2)$.

VI

1. $8765943 \times 8765943 - 8765938 \times 8765938$ এর মান নির্ণয় কর।

2. $a = 29$, এবং $b = -23$ হইলে, $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ কে $a + b + c$ দ্বারা ভাগ কর ; এবং ইহার সাহায্যে দেখাও যে, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$.

4. $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 + (bx - a)^2 + (dx - c)^2$ কে $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল কত হইবে ?

5. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 34$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর ; ইহার সাহায্যে দেখাও যে, উহা সর্ব্বদাই একটি ধনরাশি, এবং $x^2 - 7x + 9 = 0$ হইলে, ইহার মান 25 হইবে।

6. $(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2$ কে চারিটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b$;

(ii) $6a^2 - ab - b^2 + 6a - 3b$; (iii) $15x^2 - 4xy - 4y^2 + 10x + 4y$.

8. $(2x - y)^2a^4 - (x + y)^2a^2x^2 + 2(x + y)ax^4 - x^6$ কে $(2x - y)a^2 - (x + y)ax + x^3$ দ্বারা ভাগ কর।

VII

1. $x + y + z = 8$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হইলে, $xy + yz + zx$ এর মান নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে, $(2a-3b)^2+(3b-5c)^2+(5c-2a)^2$
$=2(2a-3b)(2a-5c)+2(3b-5c)(3b-2a)+2(5c-2a)(5c-3b)$.

3. $x+y+z-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ এবং $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

4. $a^2(x^2-a^2)-ab(x+a)^2+b(x^3+a^3)$ কে $a^2(x-a)+bx(x-2a)$ দ্বারা ভাগ কর।

5. দেখাও যে,
$(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2=1$.

6. $x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z$ এবং $z-x+y$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $6x^2+x-15$;
(ii) $35(x-y)^2-41(x-y)+12$; (iii) $11x^2-54xy^2+63y^4$.

8. $x+y+z=0$ হইলে, দেখাও যে, $(x+y)(y+z)(z+x)=-xyz$ এবং $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

VIII

1. গুণফলে x^2-বিশিষ্ট পদটি পর্য্যন্ত রাখিয়া, $1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2$ এবং $1+bx+\frac{b(b-1)}{2}x^2$ এর গুণফল লিখ।

2. $x+y+z=15$ এবং $xy+yz+zx=85$ হইলে, $x^2+y^2+z^2$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হইলে, দেখাও যে,
$$(ad-bc)(ad+bc)=(a-c)(a+c).$$

4. $(ax+by)^3+(ax-by)^3+(bx-ay)^3+(bx+ay)^3$ কে $(a+b)^2x^2$ $3ab(x^2-y^2)$ দ্বারা ভাগ কর।

5. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এবং $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $bx=ay$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$.
[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1910.]

7. দেখাও যে, $(x^2+y^2)(x^2+z^2)+2x(x^2+yz)(y+z)+4x^2yz$
$=(x^2+xy+xz+yz)^2$.

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4-11x^2y^2+y^4$.
[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1897.]

IX

1. a^2+ax+x^2 কে a^2-ax+x^2 দ্বারা গুণ কর।

2. দেখাও যে, $(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2+c^2)$
$$=(a^2-b^2)^2+(4ab-c^2)c^2.$$

3. $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হইলে, দেখাও যে, $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1.$

4. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^3$ এর বিস্তৃতি (expansion) লিখ [অর্থাৎ, $x+\dfrac{2}{x}$ এর ঘন (cube) নির্ণয় করিয়া যে রাশিমালাটি পাওয়া যায়, সেইটি লিখ]।

5. দেখাও যে, $(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)=a^4+b^4.$

6. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে $ab+bc+ca$ দ্বারা ভাগ কর।

7. দেখাও যে, $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

8. $(7+x)(8-x)-\dfrac{7x}{3}=17x+1-x^2$ সমীকরণটি সমাধান কর।

1. $x+\dfrac{1}{x}=2(a+m)$, $x-\dfrac{1}{x}=2b$, $y+\dfrac{1}{y}=2(c+n)$ এবং $y-\dfrac{1}{y}=2d$ হইলে, $xy+\dfrac{1}{xy}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. সরল কর : $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^4-2\left(\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^4.$

3. দেখাও যে, $(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)=2(a-c)(1-ac).$

4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,
$$(b^2-c^2)(b+c-2a)^2+(c^2-a^2)(c+a-2b)^2+(a^2-b^2)(a+b-2c)^2=0.$$

5. $a+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{4}}$ দ্বারা গুণ কর।

6. $15x^2-41x+14$ কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{2(x+1)}{9}+\dfrac{5(x-5)}{12}-4=\dfrac{x+1}{18}$, এই সমীকরণটি হইতে x এর মান নির্ণয় কর।

8. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A, তাহার আয়ের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল; কিন্তু B, বৎসরে A হইতে £80 অধিক ব্যয় করিয়া, চারি বৎসর পরে £220 ঋণগ্রস্ত হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় কত ?

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

(Highest Common Factor)

[উৎপাদক সাহায্যে (by factorisation)]

100. সংজ্ঞা: দুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশি, অপর কোন বীজগণিতীয় রাশি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, শেষোক্ত রাশিটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিদ্বয়ের, বা রাশিসমূহের, **সাধারণ গুণনীয়ক** বা উৎপাদক (common factor) বলে।

দ্রষ্টব্য। এস্থলে, **'রাশি'** অর্থে অবশ্য **মূলদ** (rational) এবং **অখণ্ড** বা **পূর্ণ** (integral) **রাশি**ই সূচিত হইতেছে [নিয়ম 91 এর টীকা দেখ]।

যে গুণনীয়ককে (অর্থাৎ উৎপাদককে) আর কোনরূপ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাকে মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) বলে।

দুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির ভিতর যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) সাধারণ (common) থাকে, তৎসমুদয়ের গুণফলকে পূর্ব্বোক্ত রাশিদ্বয়ের বা রাশিসমূহের **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (Highest Common Factor) বলে, অর্থাৎ দুই বা তদধিক রাশির অন্তর্গত বৃহত্তম-সংখ্যক সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফলকেই ঐ রাশিদ্বয়ের, বা রাশিসমূহের, গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক, বা সংক্ষেপে, **গ. সা. গু.** বলে। যথা,

যেহেতু, $6a^2b(x^2-1) = 2 \times 3 \times a \times a \times b \times (x+1) \times (x-1)$,

এবং $15ab^2(x^2-3x+2) = 3 \times 5 \times a \times b \times b \times (x-1) \times (x-2)$,

অতএব, 3, a, b এবং $x-1$ ই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের ভিতর সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক।

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের **গ. সা. গু.** $= 3ab(x-1)$.

টীকা 1. প্রদত্ত রাশি দুইটির ভিতর নিম্নলিখিত গুণনীয়কগুলিও সাধারণ; যথা, $3a$, $b(x-1)$, ab, $3(x-1)$, $3ab$ ইত্যাদি। কিন্তু, ইহাদের কোনটিই বৃহত্তম-সংখ্যক মৌলিক গুণনীয়ক দ্বারা উৎপন্ন নহে।

টীকা 2. স্পষ্টই বুঝা যায় যে, আলোচ্য রাশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক (numerical quantity) সাধারণ গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান না থাকিলে, উহাদের গ. সা. গু.

এর মান (degree), অন্যান্য যে কোন সাধারণ গুণনীয়কের মান হইতে বড় হইবে। অতএব, যে রাশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক সাধারণ গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান নাই, তাহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ককে, ঐ রাশিদ্বয়ের 'সর্ব্বোচ্চমানবিশিষ্ট ভাজক-রাশি (divisor of the highest degree)' রূপে বর্ণনা করা যায়।

টীকা 3. কোন এক রাশি B অপর এক রাশি A দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, A ই স্পষ্টতঃ A এবং B এই রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে।

টীকা 4. কোন রাশি H অন্য কতিপয় রাশি A, B, C এর গ. সা. গু. হইলে, $\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{C}{H}$ প্রভৃতি রাশিসমূহের (অর্থাৎ, A, B, C প্রভৃতিকে H দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলসমূহের) কোন গুণনীয়ক, সাধারণ (common) থাকিতে পারে না।

টীকা 5. দুই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকটিতে, কোন মৌলিক গুণনীয়কের যে সর্ব্বোচ্চ শক্তি সকল রাশির ভিতরই সাধারণ, উক্ত গুণনীয়ক সেই (সর্ব্বোচ্চ) শক্তিবিশিষ্ট হইয়া রাশিসমূহের গ. সা. গু. তে গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান থাকিবে।

টীকা 6. $A = p \times q$ এবং $B = p' \times q'$ হইলে, এবং q ও q' এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে, A ও B এর গ. সা. গু., এবং p ও p' এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।

টীকা 7. $A = m \times n$ ও $B = m' \times n'$ হইলে, এবং A ও B এর যাবতীয় এক-পদরাশিবিশিষ্ট উৎপাদক (monomial factor) যথাক্রমে m ও m' এর অন্তর্ভুক্ত হইলে, A ও B এর গ. সা. গু. $=$ (m ও m' এর গ. সা. গু.) $\times$ (n ও n' এর গ. সা. গু.)।

টীকা 8. m, A এর কোন গুণনীয়ক না হইলে, A ও B এর গ. সা. গু. এবং A ও mB এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।

101. সরল রাশিসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয়ঃ সরল রাশিসমূহকে সহজেই মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় ; কাজেই, উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা অত্যন্ত সহজ।

উদা. 1. $a^2b^4c^5$, $a^4b^3c^7$ এবং $a^3b^5c^4$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এস্থলে, a, b, c ই রাশি তিনটির সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক ; এবং a, b, c এর যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিত্রয়ের ভিতর সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে a^2, b^3 এবং c^4.

$\therefore$ সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a^2b^3c^4$.

উদা. 2. $24ab^2x^3y^4$, $36a^2x^4z^5$ এবং $240b^3x^6y^2z$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\text{এখন,}\quad 24ab^2x^3y^4 = 3\times 2^3\times ab^2x^3y^4\ ;$$
$$36a^2x^4z^5 = 2^2\times 3^2\times a^2x^4z^5\ ;$$
$$240b^3x^6y^2z = 3\times 5\times 2^4\times b^3x^6y^2z.$$

স্পষ্টতঃ, ইহাদের ভিতর 3, 2 এবং x, এই মৌলিক গুণনীয়ক তিনটিই সাধারণ; এবং এই মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে যে উচ্চতম শক্তি সকল রাশির ভিতরই সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে 3, 2^2 এবং x^3.

$$\text{সুতরাং,}\quad \text{নির্ণেয় গ. সা. গু.} = 3\times 2^2\times x^3 = 12x^3.$$

টীকা। রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে, তদন্তর্গত বিভিন্ন মৌলিক গুণনীয়কের শক্তির গুণফলরূপে প্রকাশ করার পর, যদি প্রথম রাশির সেই সকল মৌলিক গুণনীয়ক লিখিত হয় যাহা অন্যান্য রাশিতে বর্ত্তমান আছে, তাহা হইলেই, রাশিসমূহের সমুদয় সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক পাওয়া যায়। যথা, উপরোক্ত উদাহরণে প্রথম রাশির মৌলিক গুণনীয়ক 3, 2, a, b, x এবং y এর মধ্যে 3, 2, এবং x অন্য রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিতেই বর্ত্তমান আছে।

প্রশ্নমালা 51

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2b^3 এবং a^3b^2.

2. $12a^3b$ এবং $20a^2c^3$.

3. $9xy^2z^3$ এবং $24x^3y^4$.

4. $20a^3x^4y^5$ এবং $75a^2y^3$.

$18m^2n$[illegible] এবং $45m^5n^3$.

6. $16a^3x^4y$, $40a^2y^3x$ এবং $28x^3a$.

7. $24m^2np^5$, $60mn^2p$ এবং $84m^3p^2$.

8. $45x^3y^2z^4$, $75x^2y^4z^3$ এবং $90x^4y^3z^2$.

$36a^2b^2c^4x^5$, $54a^5c^2x^4$ এবং $90a^4b^3c^5$.

10. $72a^3b^4c^5$, $96b^3c^4d^5$ এবং $120c^3d^4a^5$.

11. $48a^5x^4y^3z^2$, $60x^5y^4z^3b^2$, $72y^5z^4b^3a^2$ এবং $84z^5b^4a^3x^2$.

12. $75m^4n^3p^5q^6$, $90m^3n^5p^6q^4$, $105m^6n^4p^3q^5$ এবং $135m^5n^6p^4q^3$.

13. $54a^2b^5c^3d^4$, $72a^5b^2c^4d^3$, $108a^3b^4c^5d^2$ এবং $126a^4b^3c^2d^5$.

14. $18a^3x^4y^5$, $42a^4y^3z^4$, $60x^3y^4z^5$ এবং $78a^2x^4z^3$.

15. $32a^2b^3x^4y^5z^6$, $40a^3x^5y^4z^8$, $56b^3x^2y^7z^4$, $72x^6a^5y^2z^3$ এবং $96b^4a^8x^3y^3$.

102. যে সকল রাশিকে সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় : পূর্ব্বনিয়মে প্রদর্শিত প্রক্রিয়া-পদ্ধতি এই সকল ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

উদা. 1. $a^3b^2+2a^2b^3$ এবং $a^5b-4a^3b^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^3b^2+2a^2b^3=a^2b^2(a+2b);$$

এবং $a^5b-4a^3b^3=a^3b(a^2-4b^2)=a^3b(a+2b)(a-2b).$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a^2b(a+2b).$

উদা. 2. $x^4y^2+xy^5$ এবং $x^4y+2x^3y^2+x^2y^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^4y^2+xy^5=xy^2(x^3+y^3)=xy^2(x+y)(x^2-xy+y^2);$$

এবং $x^4y+2x^3y^2+x^2y^3=x^2y(x^2+2xy+y^2)=x^2y(x+y)^2.$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=xy(x+y).$

উদা. 3. $24(x^4-2ax^3-8a^2x^2)$ এবং $54(x^5-ax^4-6a^2x^3)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=3\times 8\times x^2(x^2-2ax-8a^2)=3\times 2^3\times x^2(x+2a)(x-4a).$

দ্বিতীয় রাশি $=6\times 9\times x^3(x^2-ax-6a^2)=2\times 3^3\times x^3(x+2a)(x-3a).$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=3\times 2\times x^2(x+2a)=6x^2(x+2a).$

উদা. 4. a^4-16x^4 এবং $a^3+a^2x-10ax^2+8x^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=(a^2+4x^2)(a^2-4x^2)=(a^2+4x^2)(a+2x)(a-2x).$

দ্বিতীয় রাশি $=(a-2x)(a^2+3ax-4x^2)=(a-2x)(a-x)(a+4x).$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a-2x.$

টীকা। এই উদাহরণটি হইতে দেখা যায় যে, যদিও প্রথম রাশির ন্যায় দ্বিতীয় রাশিটিকে তত সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তথাপি উহার গুণনীয়ক সম্বন্ধে ধারণা করা কষ্টকর নহে ; কারণ, ধরিয়া লইতে পারা যায় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির মধ্যে অন্ততঃ একটি গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে। অতএব, প্রথম রাশিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করার পর, একটু পরীক্ষা করিয়া দেখিলেই বুঝা যায় যে, দ্বিতীয় রাশির একটি গুণনীয়ক $a-2x$ হইবে। কাজেই, উক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়া সহজসাধ্য।

প্রশ্নমালা 52

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^3 - ab^2$ এবং $a^4 + 2a^3b + a^2b^2$.
2. $x^5y^3 - x^3y^5$ এবং $x^5y^4 + x^4y^5$.
3. $6(x^2 - 9)$ এবং $15(x^3 + 27)$.
4. $12(a^6 - a^2b^2c^2)$ এবং $20(a^4b^2c^2 + a^2b^3c^3)$.
5. $m^6n^3 - 2m^5n^4 + m^4n^5$ এবং $(m^2n - mn^2)^3$.
6. $4a^4x - 9a^2x^3$ এবং $4a^2x^2 + 6ax^3$.
7. $18a^4b^3 - 32a^2b^5$ এবং $18a^4b^2 + 24a^3b^3$.
8. $9x^4y^4 - 36x^2y^6$ এবং $24x^4y^2 - 48x^3y^3$.
9. $6a^3b^2 - 24ab^4$ এবং $4a^5b + 32a^2b^4$.
10. $48x^2a^2(x+a)^2(x^2a^2 - xa^3)$ এবং $64(x^5a^2 - x^2a^5)(x^3a + x^2a^2)$.
11. $24(x^3 - a^3)$ এবং $40(x^4 + x^2a^2 + a^4)$.
12. $56(x^6a^2 - x^2a^6)$ এবং $72(x^5a^3 + 3a^5x^3 + 2a^7x)$.
13. $30(a^2 + 4ab + 3b^2)$ এবং $42(a^2 + ab - 6b^2)$.
14. $28(x^3 - 3x^2 - 10x)$ এবং $52(x^4 - 8x^3 + 15x^2)$.
15. $x^4y + 3x^3y^2 - 18x^2y^3$ এবং $x^3y^2 + 10x^2y^3 + 24xy^4$.
16. $a^4x^3 - 4a^3x^4 - 12a^2x^5$ এবং $a^5x^2 + 8a^4x^3 + 12a^3x^4$.
17. $4x^3 + 12x^2 + 9x$ এবং $4x^2 - 2x - 12$.
18. $a^2 - ab - 2b^2$ এবং $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$.
19. $x^2 + 3x - 10$ এবং $x^3 - x^2 - 14x + 24$.
20. $54(x^3 + 8a^3)$ এবং $90(x^3 + 7ax^2 + 16a^2x + 12a^3)$.
21. $(a^3 - b^3)(a + b)^2$, $a^4 - b^4$ এবং $3a^4 + 2a^3b - 5a^2b^2$.
22. $(2x - 3)^2(x^2 + x - 2)$, $4x^2 - x - 18$ এবং $2x^2 - 23x - 54$.
23. $8(27a^5b + a^2b^4)$, $12(6a^4b^2 - 7a^3b^3 - 3a^2b^4)$ এবং $40(3a^3b^2 + 13a^2b^3 + 4ab^4)$.
24. $x^4 - 13x^2 + 36$, $3x^3 + 13x^2 + 8x - 12$ এবং $4x^3 + 17x^2 + 9x - 18$.

পঞ্চদশ অধ্যায়

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

(Lowest Common Multiple)

[উৎপাদক সাহায্যে (by factorisation)]

103. সংজ্ঞা : কোন এক রাশি, অপর এক রাশি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশির **গুণিতক** (multiple) বলে।

যদি কোন রাশি, দুই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের, বা রাশিসমূহের, **সাধারণ গুণিতক** (common multiple) বলে।

দুই বা তদধিক রাশির বিভিন্ন সাধারণ গুণিতকসমূহের মধ্যে যেটিতে সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূনসংখ্যক মৌলিক উৎপাদক (elementary factors) বর্ত্তমান, সেইটিকে, রাশি দুইটির, বা রাশিসমূহের, **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Lowest Common Multiple) বলে। অর্থাৎ, দুই বা তদধিক রাশির সেই সাধারণ গুণিতকটিকেই 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে, যেটি, ঐ রাশিসমূহের গুণিতক হইতে হইলে ন্যূনপক্ষে যতগুলি মৌলিক উৎপাদকবিশিষ্ট হওয়া উচিত, ঠিক ততগুলি মৌলিক উৎপাদকেরই গুণফল। যথা,

ab, $2ab$, a^2b, ab^2, a^2b^2 ...... ইত্যাদির প্রত্যেকটিই a এবং b এর সাধারণ গুণিতক ; কিন্তু, ইহাদের মধ্যে abই সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূনসংখ্যক মৌলিক উৎপাদকবিশিষ্ট বলিয়া, ইহাকেই a ও b এর 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে।

অনুসি.। দুই বা তদধিক রাশির যে কোন সাধারণ গুণিতকই, উহাদের 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

টীকা। 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' এর পরিবর্ত্তে সাধারণতঃ **'ল. সা. গু.'** লিখিত হইয়া থাকে।

104. সরলরাশিসমূহের, বা সহজে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য মিশ্ররাশিসমূহের, ল. সা. গু. নির্ণয় : এস্থলে, পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই রাশিদ্বয়, বা রাশিসমূহের, ল. সা. গু. নির্ণীত হইতে পারে। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিদ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিষ্কাররূপে বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $4a^2bc$ এবং $6ab^2d$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^2 \times a^2 \times b \times c.$

দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3 \times a \times b^2 \times d.$

অতএব, $2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$ অবশ্যই রাশিদ্বয়ের প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$
$= 12a^2b^2cd.$

উদা. 2. $24x^2yz$, $18xy^3z^2$ এবং $27x^4y^2z^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^3 \times 3 \times x^2 \times y \times z.$

দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3^2 \times x \times y^3 \times z^2.$

তৃতীয় রাশি $= 3^3 \times x^4 \times y^2 \times z^2.$

অতএব, $2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$ অবশ্যই রাশিত্রয়ের প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$
$= 216x^4y^3z^2.$

উদা. 3. $4x^2(x+a)^2$, $6a^2x(x^2-a^2)$ এবং $9x^3(x^3-a^3)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^2 \times x^2 \times (x+a)^2.$

দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3 \times a^2 \times x \times (x+a)(x-a).$

তৃতীয় রাশি $= 3^2 \times x^3 \times (x-a)(x^2+ax+a^2).$

অতএব, $2^2 \times 3^2 \times a^2 \times x^3 \times (x+a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)$ অবশ্যই রাশিত্রয়ের প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু.
$= 2^2 \times 3^2 \times a^2 \times x^3 \times (x+a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$= 36a^2x^3(x+a)^2(x^3-a^3).$

উদা. 4. x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x এবং $x^4+x^3-6x^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= (x-1)(x-2).$

দ্বিতীয় রাশি $= x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x+3).$

তৃতীয় রাশি $= x^2(x^2+x-6) = x^2(x-2)(x+3).$

অতএব, $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ নিশ্চয়ই রাশি তিনটির প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= x^2(x-1)(x-2)(x+3)$.

উদা. 5. x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1, x^4-2x^3+2x-1 এবং $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-2x(x^2-1)$$
$$=(x^2-1)\{(x^2+1)-2x\}$$
$$=(x^2-1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)$$
$$=(x^2-2x+1)(x^2+1)=(x-1)^2(x^2+1).$$

অতএব, $(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$ অবশ্যই রাশিগুলির প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$.

প্রশ্নমালা 53

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2b এবং ab^2.
2. a^3b^2 এবং a^2bc.
3. $6x^2y^4$ এবং $10xy^2$.
4. $4m^2n^3$ এবং $14m^4n^2p$.
5. $8x^2y^3z$ এবং $12x^3y^2z^2$.
6. $4a^2bc$, $10ab^2c$ এবং $14abc^2$.
7. $8a^3b^2c$, $12ab^3c^2$ এবং $20a^2bc^3$.
8. $6x^4y$, $9x^2y^2z$, $12a^2xy^3$ এবং $15axz^2$.
9. a^3b-ab^3 এবং $a^3b^2+a^2b^3$.
10. $4(x-y)^2$, $6(x^2-y^2)$ এবং $8(x+y)^2$.
11. x^2-4x+3 এবং x^2-5x+6.
12. $a^3+2a^2x-3ax^2$ এবং $a^4+a^3x-6a^2x^2$.
13. $a^2(a^2-4)$ এবং $a^4+2a^3-8a^2$.
14. $4a^2x^2$, $2x(x^2-a^2)$ এবং $6a^3x(x^3+a^3)$.
15. $12(x^2+3x-10)$ এবং $16(x^2+4x-12)$.

16. $x^2+2x-15$, $x^2+9x+20$ এবং $x^2+4x-21$.

17. $12a^4-27a^2b^2$, $2a^2+ab-3b^2$ এবং $2a^2-ab-3b^2$.

18. $8a^3+27b^3$, $8a^3-27b^3$ এবং $16a^4+36a^2b^2+81b^4$.

19. $8x^4-50x^2y^2$, $12x^3+24x^2y-15xy^2$ এবং $16x^2-48xy+20y^2$.

20. $4x^2-12ax+9a^2$, $6x^2-7ax-3a^2$ এবং $6x^2-11ax+3a^2$.

21. $2x^2+6x+9$, $4x^3-12x^2+18x$ এবং $4x^4+81$.

22. $9a^2-6ax+x^2$, $6a^2+10ax-4x^2$ এবং $9a^2-21ax+6x^2$.

23. $8x^3-12x^2+6x-1$, $8x^3-4x^2-2x+1$ এবং $2x^2+5x-3$.

24. $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-7xy+12y^2$, $x^2+2xy-15y^2$ এবং $x^2+xy-20y^2$.

25. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1869.]

26. $1+4x+4x^2-16x^4$ এবং $1+2x-8x^3-16x^4$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1871.]

27. $9x^4-28x^2+3$, $27x^4-12x^2+1$, $27x^4+6x^2-1$ এবং x^4-6x^2+9. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

[সর্ব্বশেষ রাশিটির উৎপাদকসমূহ হইতেই প্রথম রাশিটির একটি উৎপাদক সম্বন্ধে ধারণা করা যায়।]

ষোড়শ অধ্যায়

সহজ ভগ্নাংশ (Easy Fraction)

105. সংজ্ঞা: a এবং b এর যে কোন মানই হউক না কেন, $\frac{a}{b}$'কে একটি বীজগণিতীয় **ভগ্নাংশ** বলে; এবং ইহাকে এরূপ একটি রাশি বলিয়া গণ্য করা হয়, যাহাকে b দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল a এর সমান হয়। অর্থাৎ, $\frac{a}{b}$ কে '$a \div b$' এর সমতুল্য বলিয়া ধরা হয়। $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশটিতে, a কে **লব** (numerator) এবং b কে **হর** (denominator) বলা হইয়া থাকে।

। কোন রাশিকে অন্য কোন রাশি দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফলকে, উপরে ভাজ্য ও নীচে ভাজক এবং উভয়ের মধ্যে একটি অনুভূমিক রেখা (horizontal line) টানিয়া, প্রকাশ করা ভিন্ন বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ আর কিছুই নহে। এইরূপে লিখিত ভাজ্য ও ভাজককে যথাক্রমে ভগ্নাংশের 'লব' ও 'হর' বলা হয়।

106. কোন ভগ্নাংশের 'লব' ও 'হর'কে যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

a, b এবং m যে কোন তিনটি রাশি হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

ধর, $x=\frac{a}{b}$, তাহা হইলে, $x\times b=\frac{a}{b}\times b=a.$ [সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore\ x\times b\times m=a\times m$; অথবা, $x\times bm=am$;

$\therefore\ x=am\div bm$; অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$

বিপরীতক্রমে, $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}=\frac{am\div m}{bm\div m}.$

অনুসি.। $\frac{a}{b}=\frac{a\times(-1)}{b\times(-1)}=\frac{-a}{-b}.$ অতএব, লব ও হর, এই উভয়েরই চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিলে, ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

107. ভগ্নাংশকে 'লঘিষ্ঠ আকারে' পরিবর্ত্তন (Reduction of a fraction to its lowest terms) :

সংজ্ঞা : কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ (common) না থাকিলে, ভগ্নাংশটিকে 'লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ' বলা হয়।

অতএব, কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন করিতে হইলে (অথবা, সংক্ষেপে বলিতে গেলে, 'সরল করিতে হইলে') এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় করিতে হয়, যাহা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির সমান এবং যাহার লব ও হরের ভিতর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই ; কাজেই, প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা উভয়কে ভাগ করিলেই নির্ণেয় লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশটি পাওয়া যায়।

টীকা। যে সকল ক্ষেত্রে লব ও হরকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই সকল ক্ষেত্রে লব ও হর হইতে ঐ সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ করিলেই অবিলম্বে লঘিষ্ঠ আকার পাওয়া যায়।

উদা. 1. $\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর।

$$\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}=\frac{2\times2\times a^2\times b^3\times c^2}{2\times5\times a\times b^4\times c^2}=\frac{2a}{5b}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}$.

$$\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}=\frac{a^2b^3(a+b)(a-b)}{3ab^4(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a(a-b)}{3b(a^2-ab+b^2)}$$

উদা. 3. $\frac{x^2+3x-40}{x^2+4x-32}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর।

লব $=(x+8)(x-5)$.

হর $=(x+8)(x-4)$.

অতএব, প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{(x+8)(x-5)}{(x+8)(x-4)}=\frac{x-5}{x-4}$.

উদা. 4. সরল কর : $\frac{2a^2+3ax-2ab-3bx}{3a^2-2ax-3ab+2bx}$.

লব $=2a(a-b)+3x(a-b)=(a-b)(2a+3x)$.

হর $=3a(a-b)-2x(a-b)=(a-b)(3a-2x)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\frac{(a-b)(2a+3x)}{(a-b)(3a-2x)}=\frac{2a+3x}{3a-2x}$.

প্রশ্নমালা 54

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর :

1. $\frac{2a^2b^3}{4a^2b^4}$.
2. $\frac{6x^2y^3}{8xy^4}$.
3. $\frac{4a^2xy^2}{10ax^2y^2}$.
4. $\frac{15x^3y^2z^4}{25x^2y^4z^3}$.
5. $\frac{18a^2bc^4d^5}{27a^3b^2c^4d^4}$.
6. $\frac{16x^2a^4y^3z^5}{40a^3z^4x^3y^4}$.
7. $\frac{70a^2b^3c^4d^7}{105c^4d^2a^3b^3}$.
8. $\frac{39m^2n^5p^3q^6}{65p^2m^3n^4q^5}$.
9. $\frac{x^2-a^2}{x^2+ax}$.
10. $\frac{x^2-3x}{9x-x^3}$.
11. $\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}$.
12. $\frac{3a^2-12ab}{48b^2-3a^2}$.
13. $\frac{3ax-12a^2}{x^2-16a^2}$.
14. $\frac{2x^4-4a^2x^2}{x^4-4a^2x^2+4a^4}$.
15. $\frac{4x^2+8x}{x^2+5x+6}$.

16. $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$. 17. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$. $\dfrac{a^2-3ab-4b^2}{a^2-4ab-5b^2}$.

19. $\dfrac{a^4+a^3b+a^2b^2}{a^3+b^3}$. 20. $\dfrac{1-7x+12x^2}{1-8x+15x^2}$.

21. $\dfrac{x^2-6xy+5y^2}{x^2+2xy-35y^2}$. 22. $\dfrac{1-9a^2+14a^4}{1-4a^2-21a^4}$.

23. $\dfrac{x^4-8x^2-65}{x^4+x^2-20}$. 24. $\dfrac{3a^3x+9a^2x^2+27ax^3}{a^3-27x^3}$.

25. $\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-2x-8}$. 26. $\dfrac{3x^2-5ax+2a^2}{3x^2+ax-2a^2}$.

27. $\dfrac{3x^2+16ax+5a^2}{3x^2+22ax+7a^2}$. 28. $\dfrac{6x^2-7x-20}{9x^2+6x-8}$.

29. $\dfrac{2x^2+3ax-20a^2}{3x^2+5ax-28a^2}$. 30. $\dfrac{10-17ax+3a^2x^2}{5-26ax+5a^2x^2}$.

31. $\dfrac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$. 32. $\dfrac{6ac+10bc+9ax+15bx}{6c^2+9cx-2c-3x}$.

33. $\dfrac{8bx+12ab+6xy+9ay}{12bx+8ab+9xy+6ay}$. 34. $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{a^3+a^2b-a-b}$.

35. $\dfrac{a^2-b^2-2bc-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2}$.

108. দুই বা তদধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ হর-বিশিষ্ট করা (Reduction of two or more fractions to a common denominator) :

ধর, $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$, ইত্যাদি কতকগুলি ভগ্নাংশ নির্দ্দেশ করিতেছে এবং L উহাদের হরসমূহের (অর্থাৎ, $b, d, f, \ldots\ldots$ ইত্যাদির) ল. সা. গু.। এখন, যেহেতু কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে যে কোন **একই** রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না, অতএব,

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(L\div b)}{b\times(L\div b)}=\frac{a\times(L\div b)}{L};$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times(L\div d)}{d\times(L\div d)}=\frac{c\times(L\div d)}{L};$$

$$\frac{e}{f}=\frac{e\times(L\div f)}{f\times(L\div f)}=\frac{e\times(L\div f)}{L};\quad \text{ইত্যাদি।}$$

কাজেই, তৃতীয় স্তম্ভের (column এর) ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির সমান এবং ইহাদের প্রত্যেকের হরই L.

সুতরাং, কতিপয় ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করার নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া গেল :

ভগ্নাংশসমূহের হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া, লব্ধ ল. সা. গু. কে এক একটি হর দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তদ্দ্বারা উক্ত হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ কর।

উদা. 1. $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x^2}{a(a-b)}$ এবং $\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন কর।

প্রদত্ত হরসমূহের ল. সা. গু. $= ab(a^2-b^2)$; এবং ইহাকে ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকের হর দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি যথাক্রমে $ab(a-b)$, $b(a+b)$ এবং a হইবে।

$$\text{অতএব,}\quad \frac{x}{a+b} = \frac{x \times ab(a-b)}{(a+b) \times ab(a-b)} = \frac{xab(a-b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)} = \frac{x^2 \times b(a+b)}{a(a-b) \times b(a+b)} = \frac{x^2 b(a+b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^3}{b(a^2-b^2)} = \frac{x^3 \times a}{b(a^2-b^2) \times a} = \frac{x^3 a}{ab(a^2-b^2)}.$$

উদা. 2. $\frac{x-1}{x^2-5x+6}$, $\frac{x-2}{x^2-4x+3}$ এবং $\frac{x-3}{x^2-3x+2}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

হরগুলি যথাক্রমে $(x-2)(x-3)$, $(x-1)(x-3)$ এবং $(x-1)(x-2)$, এবং ইহাদের ল. সা. গু. $=(x-1)(x-2)(x-3)$; এই ল. সা. গু. কে হরসমূহের প্রত্যেকটি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলি যথাক্রমে $x-1$, $x-2$ এবং $x-3$ হয়। অতএব,

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x^2-5x+6)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-4x+3)(x-2)} = \frac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x^2-3x+2)(x-3)} = \frac{x^2-6x+9}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

প্রশ্নমালা 55

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন কর :

1. $\frac{a}{2b}, \frac{3c}{4d}, \frac{e}{f}$.   2. $\frac{x^2}{2bc}, \frac{y^2}{3ca}, \frac{z^2}{4ab}$.

3. $\frac{ab}{4xy^2}, \frac{bc}{6x^2y}, \frac{ca}{10x^3}$.   4. $\frac{a}{a-b}, \frac{b}{a+b}, \frac{c}{a(a+b)}$.

5. $\frac{x^2}{a^2+2ab}, \frac{y^2}{a-2b}$.   6. $\frac{2a}{a-b}, \frac{a-c}{ab-a^2}$.

7. $\frac{2a}{a-b}, \frac{3b}{b-a}, \frac{4c}{a+b}$.   8. $\frac{2x}{a^2(a+x)}, \frac{3y}{b^2(a-x)}, \frac{4z}{c^2(a^2-x^2)}$.

9. $\frac{a^2}{2xy-3y^2}, \frac{b^2}{2x^2+3xy}, \frac{c^2}{4x^3y-9xy^3}$.

10. $\frac{a^2}{x^2+x+1}, \frac{b^2}{x^2-x+1}$.   11. $\frac{3}{x^2-x-2}, \frac{x}{x^2+x-6}$.

12. $\frac{a-2b}{a(a^2-2ab+4b^2)}, \frac{bc}{a^3+8b^3}$.

13. $\frac{a}{a-3b}, \frac{b}{a^2+3ab+9b^2}, \frac{c}{a^3-27b^3}$.

14. $\frac{a}{b(a-b-c)}, \frac{b}{a(a-b+c)}, \frac{c}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

15. $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}, \frac{b-a}{(a-c)(b-c)}, \frac{b-c}{(c-a)(a-b)}$.

109. ভগ্নাংশের যোগ : 47 নিয়মের তৃতীয় অনুসিদ্ধান্তে দেখা গিয়াছে যে, $a, b, c, d, e,$ যে কোন রাশিই হউক না কেন,

$$a(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae.$$

অতএব, বিপরীতভাবে, $\frac{ab+ac+ad+ae}{a}=b+c+d+e=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}+\frac{ad}{a}+\frac{ae}{a}$.

সুতরাং, ab, ac, ad, ae এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে, p, q, r, s বসাইলে, দেখা যায় যে, $\frac{p+q+r+s}{a}=\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\frac{s}{a}$, এবং এক্ষেত্রে, p, q, r, s, a ও যে কোন রাশি।

কাজেই, কতকগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের যোগফল এরূপ একটি ভগ্নাংশ হইবে যাহার লব, প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের লবের সমষ্টির সমান এবং হর, উহাদের সাধারণ হর।

অতএব, ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহাদিগকে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া লব্ধ লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে সাধারণ হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদা. 1. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু, $$\frac{b}{b-a}=\frac{b\times(-1)}{(b-a)\times(-1)}=\frac{-b}{a-b}.$$

অতএব, $$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{-b}{a-b}=\frac{a+(-b)}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1.$$

উদা. 2. $\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু, হরগুলির ল. সা. গু. $=x^2-a^2$,

সুতরাং, $\frac{x}{x+a}=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2}$ এবং $\frac{a}{x-a}=\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$.

অতএব, নির্ণেয় মান $=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2}+\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x(x-a)+a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

উদা. 3. $\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

এস্থলে, তিনটি ভগ্নাংশকেই একসঙ্গে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন করা তত সুবিধাজনক নহে ; কাজেই, নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বিত হইল।

এখন, $$\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)+b}{a^2-b^2}=\frac{a}{a^2-b^2}.$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-a(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{2ab^2}{a^4-b^4}$.

উদা. 4. সরল কর : $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}+\frac{32}{x^4+16}$.

এখন, $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4};$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}=\frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}=\frac{32}{x^4-16}.$$

সর্ব্বশেষে, $\dfrac{32}{x^4-16}+\dfrac{32}{x^4+16}=\dfrac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}$

$=\dfrac{64x^4}{x^8-256}$; ইহাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a+2b}-\dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{a+4b}.$

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a+2b}\right\}-\left\{\dfrac{1}{a+3b}-\dfrac{1}{a+4b}\right\}.$

এখন দেখা যায় যে,

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}=\frac{(a+2b)-(a+b)}{(a+b)(a+2b)}=\frac{b}{(a+b)(a+2b)};$$

এবং $\dfrac{1}{a+3b}-\dfrac{1}{a+4b}=\dfrac{(a+4b)-(a+3b)}{(a+3b)(a+4b)}=\dfrac{b}{(a+3b)(a+4b)};$

সর্ব্বশেষে,

$$\frac{b}{(a+b)(a+2b)}-\frac{b}{(a+3b)(a+4b)}=\frac{b(a+3b)(a+4b)-b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)};$$

ইহার লব $=b(a^2+7ab+12b^2)-b(a^2+3ab+2b^2)$

$=b(4ab+10b^2)=2b^2(2a+5b).$

অতএব, নির্ণেয ফল $=\dfrac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}.$

প্রশ্নমালা 56

মান নির্ণয় কর :

1. $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}.$

2. $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}.$

3. $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{x}{x-a}.$

4. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}.$

5. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}.$

6. $\dfrac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2}-\dfrac{2x-3y}{2x+3y}.$

7. $\dfrac{a}{(a+b)^2}-\dfrac{b}{a^2-b^2}.$

8. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$

9. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}.$

10. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}.$

11. $\dfrac{1}{x^2+7x+10}+\dfrac{1}{x^2+13x+40}$.

12. $\dfrac{1}{2x+3y}-\dfrac{(2x-3y)^2}{8x^3+27y^3}$.

13. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$.

14. $\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{2a}{4b^2-a^2}$.

15. $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

16. $\dfrac{a-2x}{a+2x}-\dfrac{a+2x}{a-2x}+\dfrac{8ax}{a^2+4x^2}$.

17. $\dfrac{3x+1}{x-3}-\dfrac{x-3}{3x+9}-\dfrac{5x^2+24x}{2x^2-18}$.

18. $\dfrac{4a-b}{1-4ab}+\dfrac{4a+b}{1+4ab}-\dfrac{4b(1-8a^2)}{16a^2b^2-1}$.

19. $\dfrac{x}{x-2a}+\dfrac{x}{x+2a}+\dfrac{2x^2}{x^2+4a^2}$.

20. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3b}{a^4+b^4}$.

21. $\dfrac{x}{3x-y}+\dfrac{x}{3x+y}+\dfrac{6x^2}{9x^2+y^2}$.

22. $\dfrac{1}{x-3a}-\dfrac{1}{2x+6a}-\dfrac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

23. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}-2$.

24. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$.

25. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{2}{2x+a}+\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{2}{2x-a}$.

26. $\dfrac{3}{a-x}-\dfrac{1}{x+3a}+\dfrac{3}{a+x}+\dfrac{1}{x-3a}$.

27. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^2-1}$.

28. $\dfrac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\dfrac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

29. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{2}{x^2-8x+15}$.

30. $\dfrac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\dfrac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\dfrac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

31. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

$\dfrac{1}{1-x+x^2}-\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2+x^4}$.

33. $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$.

34. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}+\dfrac{6x}{x^3+8}$.

35. $\dfrac{11}{16(2x^2-6ax+9a^2)}-\dfrac{11}{32x^2+96ax+144a^2}+\dfrac{33ax}{4(4x^4-81a^4)}$.

110. ভগ্নাংশের গুণন : $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ যে কোন দুইটি ভগ্নাংশ হইলে, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর, $x = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

তাহা হইলে, $x \times b \times d = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d = \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d$

$$= \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) = a \times c.$$

অথবা, $x \times bd = ac$; $\therefore$ $x = \frac{ac}{bd}$; অর্থাৎ, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

এইরূপ, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$;

এবং $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{ace}{bdf} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$; ইত্যাদি।

সুতরাং, কতকগুলি ভগ্নাংশের গুণফলও এরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব, প্রদত্ত লবগুলির গুণফলের সমান এবং যাহার হর, প্রদত্ত হরগুলির গুণফলের সমান।

অনুসি.। যেহেতু, $c = \frac{c}{1}$, অতএব, $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$.

া. 1. [গুণ] কর : $\frac{x^2}{yz}$, $\frac{y^2}{zx}$ এবং $\frac{z^2}{xy}$.

নির্ণেয় গুণফল $= \frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{yz \times zx \times xy} = \frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{y^2 \times z^2 \times x^2} = 1.$

উদা. 2. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$ কে $\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $= \frac{x(a-x) \times a(a+x)}{(a^2+2ax+x^2)(a^2-2ax+x^2)} = \frac{ax(a-x)(a+x)}{(a+x)^2(a-x)^2}$

$$= \frac{ax}{(a+x)(a-x)} = \frac{ax}{a^2-x^2}.$$

উদা. 3. গুণ কর : $\frac{1-x^2}{1+y}$, $\frac{1-y^2}{x+x^2}$ এবং $1+\frac{x}{1-x}$.

যেহেতু, $1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$,

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = \frac{(1+x)(1-x)}{1+y} \times \frac{(1+y)(1-y)}{x(1+x)} \times \frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{(1+x)(1-x)(1+y)(1-y)}{(1+y)x(1+x)(1-x)} = \frac{1-y}{x}.$$

প্রশ্নমালা 57

গুণ কর :

1. $\frac{2a^2}{3ab}$, $\frac{9b^2}{16ac}$ এবং $\frac{8c^2}{9bc}$.

2. $\frac{4a^2b^2}{3c^2}$, $\frac{9c^2}{16d^2}$ এবং $\frac{4d^2}{27b^2}$.

3. $\frac{x^3}{yz}$, $\frac{y^3}{zx}$ এবং $\frac{z^3}{xy}$.

4. $\frac{7a^2b^2c^2}{12xyz}$ এবং $\frac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$.

5. $\frac{12m^2n^3}{7xy^2z}$ এবং $\frac{35x^3yz}{96m^3n}$.

সরল কর :

6. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^2+x-2}{x^2+x}$.

7. $\frac{a^2-9b^2}{a^2+3ab} \times \frac{3a^2}{a^2-3ab}$.

8. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab} \times \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$.

9. $\frac{a^3+8x^3}{a^3-2a^2x} \times \frac{a^2-4ax+4x^2}{a^2-2ax+4x^2}$.

10. $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-\cdots}$

11. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2-8x+12}$.

12. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} \times \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

13. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{a-b}{a^2+ab}$.

14. $\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2} \times \frac{3x^2+x}{4x-2}$

15. $\frac{x^2-6x-16}{x^2-4x-21} \times \frac{x^2-11x+28}{x^2-12x+32}$.

16. $\frac{a^2-x^2}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \times \left(a+\frac{ax}{a-x}\right)$

17. $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)$.

18. $\left(\frac{4a}{3x}+\frac{3x}{2b}\right)\left(\frac{2b}{3x}+\frac{3x}{4a}\right)$.

19. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)$.

20. $\frac{2x^2-7x+3}{2x^2+7x-4} \times \frac{3x^2+11x-4}{3x^2+8x-3} \times \frac{2x^2+x-15}{2x^2-11x+15}$.

21. $\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac} \times \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$.

22. $\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{b^2-c^2-a^2+2ac} \times \frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

111. ভগ্নাংশের ভাগ : $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ যে কোন দুইটি ভগ্নাংশ হইলে, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর, $x = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. তাহা হইলে, $x \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$;

[$\because$ m ও n যে কোন রাশিই হউক না কেন, $m \div n \times n = m$]

$\therefore$ $x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$; অথবা, $x = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$; [$\because$ $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1.$]

সুতরাং, একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, প্রথমটিকে শেষোক্তটির অন্যোন্যক (reciprocal) দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অনুসি.। $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

উদা. 1. সরল কর : $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \div \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

$$\text{নির্ণেয় ফল} = \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \times \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)} = 1.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+x-12} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$.

$$\text{নির্ণেয় ফল} = \frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12} \times \frac{x^2+x-12}{x^2-3x-10} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \times \frac{(x+4)(x-3)}{(x-5)(x+2)} \times \frac{(x-5)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)(x+1)}{(x+3)(x+4)(x-5)(x+2)(x-3)(x-1)} = \frac{x+1}{x+3}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b} - \dfrac{b}{a+b}} \div \dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}} \times \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

এখন,
$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=\frac{\frac{a(a+b)-a(a-b)}{a^2-b^2}}{\frac{b(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\div\frac{2b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{2b^2}=\frac{a}{b}; \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং
$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}=\frac{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}. \qquad \cdots \qquad (2)$$

অতএব, (1) এবং (2) হইতে, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{a}{b}\div\frac{a^2+b^2}{2ab}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{2ab}{a^2+b^2}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

প্রশ্নমালা 58

সরল কর :

1. $\frac{4a^2bc}{15xy^2z}\div\frac{8ab^2c}{25x^2yz}$. **2.** $\frac{a^2+ab}{a-b}\div\frac{ab}{a^2-b^2}$. **3.** $\frac{x^2-49}{x^2-25}\div\frac{x+7}{x+5}$.

4. $\frac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **5.** $\frac{m^2-9n^2}{m^2+5mn+6n^2}\div\frac{m^2-2mn-3n^2}{m^2-n^2}$.

6. $\frac{m^3-n^3}{m+n}\div\frac{m^2+mn+n^2}{m^2-n^2}$. **7.** $\left(\frac{2x+y}{x+y}-1\right)\div\left(1+\frac{y}{x+y}\right)$.

8. $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\div\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$.

9. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$. **10.** $\frac{x^2-4}{x^2+3x-18}\div\frac{x^2-5x-14}{x^2-36}$.

11. $\left\{1-\frac{2pq}{p^2+q^2}\right\}\div\left\{\frac{p^3-q^3}{p-q}-3pq\right\}$.

12. $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2-4ab}\div\frac{(a-b)^2+4ab}{a^3-b^3-3ab(a-b)}$.

13. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\frac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\frac{xy}{x^2-y^2}$.

14. $\dfrac{a(a-b)^2+4a^2b}{ab+b^2} \div \dfrac{a^2-b^2}{ab} \times \dfrac{b(a+b)^2-4ab^2}{a^2-ab}$.

15. $\dfrac{x^2-x-30}{x^2-36} \div \dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8} \div \dfrac{x+4}{2x^2+12x}$.

16. $\dfrac{x^2+3x-108}{x^2-64} \div \dfrac{x^2+6x-72}{x^2+x-56} \div \dfrac{x^2-16x+63}{x^2-14x+48}$.

17. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

18. $\left\{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right\} \div \left\{\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right\}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1868.]

19. $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)} \div \dfrac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab} \times \dfrac{a}{(a+b)^2-2ab}$.

20. $\dfrac{(a+b)\{(a+b)^2-ab\}}{(a-b)^2+2ab} \div \dfrac{(a-b)^2+3ab}{(a+b)\{(a-b)^2+ab\}} \times \dfrac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-3ab}$.

21. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)} \times \dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874.]

সপ্তদশ অধ্যায়

I. সরল সমীকরণ (Simple Equations)

112. সহজ 'সরল সমীকরণ' সমাধান করার প্রণালী পঞ্চম অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ সকল বিষয় আরও বিশদভাবে আলোচিত হইবে।

পূর্ব্বে দেখান হইয়াছে যে, সমীকরণ সমাধান করার পদ্ধতি প্রধানতঃ কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধের উপর নির্ভর করে। সেইগুলি হইতে স্পষ্টই বুঝা গিয়াছে যে, সমীকরণের কোন পরিবর্ত্তন হয় না,

(i) যদি সমীকরণস্থিত কোন পদকে যথানিয়মে পক্ষান্তর করা হয় ;

এবং (ii) যদি সমীকরণের উভয় পক্ষকেই যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হয়।

কাজেই, 'একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট' সমীকরণের সমাধান-প্রণালী নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় ;

(1) সমীকরণের প্রত্যেক পক্ষকে প্রক্রিয়াচিহ্নানুসারে পৃথক্‌ভাবে সরল কর ;

(2) অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সকল পদগুলিকে সমতাচিহ্নের বামদিকে এবং অন্যান্য সকল পদগুলিকে সমতাচিহ্নের ডা'নদিকে পক্ষান্তর কর।

(3) পুনরায় প্রত্যেক পক্ষকে পৃথক্‌ভাবে সরল কর।

(4) সর্ব্বশেষে, উভয় পক্ষকে অজ্ঞাতরাশির সহগ দ্বারা ভাগ কর।

তাহা হইলেই, অজ্ঞাতরাশির নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

টীকা। উপরোক্ত উপায়ে নির্ণীত মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কি না, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত।

উদা. 1. $(6x+9)^2+(8x-7)^2=(10x+3)^2-71.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

$$\text{বাম পক্ষ}=(36x^2+108x+81)+(64x^2-112x+49)$$
$$=100x^2-4x+130\ ;$$
$$\text{এবং ডা'ন পক্ষ}=(100x^2+60x+9)-71$$
$$=100x^2+60x-62.$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হইল :

$$100x^2-4x+130=100x^2+60x-62.$$

এখন, উভয় পক্ষ হইতেই $100x^2$ অপসারিত করিয়া,

$$-4x+130=60x-62.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $\quad -4x-60x=-130-62,$

অথবা, $\quad -64x=-192\ ;$

এখন, উভয় পক্ষকেই -64 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x=3.$$

অতএব, নির্ণেয় মূল $=3.$

উদা. 2. $\dfrac{x-6}{8}-\dfrac{2x-15}{9}+1=\dfrac{x}{15}-\dfrac{x-12}{6}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এখন, হরগুলির লঃ সা. গু. $8\times9\times5$ অর্থাৎ 360 দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$\frac{360(x-6)}{8}-\frac{360(2x-15)}{9}+360=\frac{360x}{15}-\frac{360(x-12)}{6},$$

অথবা $\quad 45(x-6)-40(2x-15)+360=24x-60(x-12),$

অথবা, $45x - 270 - 80x + 600 + 360 = 24x - 60x + 720,$

অথবা, $-35x + 690 = -36x + 720.$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $-35x + 36x = 720 - 690,$

অথবা, $x = 30.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{1}{3}\{4a(1+x) - \frac{9}{4}(a-x)\} = \frac{1}{4}\{3a(1-x) - \frac{16}{3}(a+x)\}$

বাম পক্ষ $= \frac{4a}{3}(1+x) - \frac{3}{4}(a-x) = \left(\frac{4a}{3} - \frac{3a}{4}\right) + \left(\frac{4a}{3} + \frac{3}{4}\right)x$

$= \frac{7a}{12} + \frac{16a+9}{12}.x$;

এবং ডা'ন পক্ষ $= \frac{3a}{4}(1-x) - \frac{4}{3}(a+x) = \left(\frac{3a}{4} - \frac{4a}{3}\right) - \left(\frac{3a}{4} + \frac{4}{3}\right)x$

$= -\frac{7a}{12} - \frac{9a+16}{12}.x.$

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইল :

$$\frac{7a}{12} + \frac{16a+9}{12}.x = -\frac{7a}{12} - \frac{9a+16}{12}.x.$$

উভয় পক্ষকেই 12 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$7a + (16a+9)x = -7a - (9a+16)x.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$\{(16a+9) + (9a+16)\}x = -14a,$

অথবা, $25(a+1)x = -14a$;

অতএব, এখন উভয় পক্ষকেই $25(a+1)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$x = \frac{-14a}{25(a+1)}$; ইহাই নির্ণেয় বর্গমূল।

উদা. 4. $\frac{x}{a+b} + 1 = \frac{x}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এখন, হরগুলির ল. সা. গু. $a^2 - b^2$ দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$(a-b)x + (a^2 - b^2) = (a+b)x + (a-b)^2.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\therefore (a-b)x - (a+b)x = (a-b)^2 - (a^2 - b^2),$$

অথবা, $\{(a-b)-(a+b)\}x = -2ab+2b^2$,

অথবা, $-2bx = -2b(a-b)$.

সুতরাং, উভয় পক্ষকেই $-2b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $x = a-b$.

প্রশ্নমালা 59

x এর মান নির্ণয় কর :

1. $3(x-4)^2+5(x-3)^2=(2x-5)(4x-1)+24$.
2. $(12x+9)^2+(5x+3)^2=(13x+9)^2+33$.
3. $5(x+1)^2+7(x+3)^2=12(x+2)^2$.
4. $(3x-14)^2+(4x-19)^2-(5x-23)^2=22$.
5. $(5x-8)^2+(12x-7)^2=(13x-10)^2+37$.
6. $(x-1)^3+(x+1)^3=2x(x^2-1)+4$.
7. $(x-2)^3+2x^3+(x+2)^3=4x^2(x+2)$.
8. $(x+2)(x+3)(x+4)+96=x^2(x+9)+5(3x+13)$.
9. $3(x^2-14)=(x+1)^2+(x-2)^2+(x-5)^2$.
10. $a(x-a)=b(x-b)$.
11. $3(x-a)+5(2x-3a)=8a$.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :

12. $(x+a)(x+b)-(a+b)^2=(x-a)(x-b)$.
13. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$.
14. $m^2(x-m)+n^2(x+n)+mnx=0$.
15. $b(x-2a)+a(x-2b)=(a-b)^2$.
16. $a(4x-a)+b(4x-b)-2ab=0$.
17. $x(x-a)+x(x-b)-2(x-a)(x-b)=0$.
18. $(x+3a)(x-3b)+3(x-3a)(x+3b)=4(x-3a)(x-3b)$.
19. $(2b+2c-x)^2+(2b-2c+x)^2=(2b+2d-x)^2+(2b-2d+x)^2$.
20. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.
21. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$.
22. $\frac{x}{a}+a=\frac{x}{b}+b$.
23. $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2$.
24. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x+3)=16$.
25. $\frac{x-6}{5}+\frac{x-4}{3}=8-\frac{x-2}{7}$.
26. $\frac{x}{10}+\frac{2x-13}{9}=8-\frac{4x-35}{15}$.

27. $\frac{x+7}{2}+\frac{x+13}{5}+\frac{x+17}{7}=\frac{x+27}{4}$.

28. $6\frac{1}{3}-\frac{x-7}{3}=\frac{4x-2}{5}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1861.]

29. $\frac{x-1}{3}-\frac{x-9}{2}+\frac{3x-2(x-2)}{7}=4\frac{1}{2}$.

30. $\frac{2x-9}{27}+\frac{x}{18}-\frac{x-3}{4}=8\frac{1}{3}-x$.

31. $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$.

32. $\frac{7x+9}{4}-\left(x-\frac{2x-1}{9}\right)=7$.

33. $\frac{x+7}{3}-5\frac{3}{4}=\frac{2x+5}{7}+\frac{10-5x}{8}$.

34. $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)=\frac{1}{6}\left(2x-57\right)-\frac{5}{3}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

35. $\frac{4x-21}{7}+7\frac{5}{6}+\frac{7x-28}{3}=x+3\frac{3}{4}-\frac{9-7x}{8}+\frac{1}{12}$.

36. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1866.]

37. $\frac{x-3}{7}-\frac{\frac{1}{2}x-3}{3}=\frac{\frac{1}{6}x+2}{2}-\frac{x-6}{3}+\frac{x}{8}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1866.]

38. $\frac{1}{8}(x-2)-\frac{1}{7}(x-4)=\frac{1}{12}(2x-3)-2\frac{3}{4}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1869.]

39. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1870.]

40. $\frac{2x-13}{9}-\frac{x-1}{11}=\frac{x}{8}+\frac{x}{7}-9$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

41. $\frac{2x-3}{6}+\frac{3x-8}{11}=\frac{4x+15}{33}+\frac{1}{2}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1877.]

42. $\frac{4x+3}{9}+\frac{13x}{108}=\frac{8x+19}{18}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1878.]

43. $\frac{x^2-2\frac{1}{2}}{4}-\frac{x-3\frac{1}{2}}{5}=\frac{2x^2-3}{8}-\frac{x-5\frac{1}{2}}{3}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

44. $\frac{a-x^2}{bx}-\frac{b-x}{c}=\frac{c-x}{b}-\frac{b-x^2}{cx}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

45. $\frac{x+2\frac{1}{2}}{15}+\frac{x+3\frac{1}{3}}{25}=\frac{x+4\frac{1}{6}}{55}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

46. $\frac{11x-13}{25}+\frac{19x+3}{7}-\frac{5x-25\frac{1}{3}}{4}=28\frac{1}{7}-\frac{17x+4}{21}$.

47. $\dfrac{x-1\frac{2}{2}\frac{5}{6}}{2}-\dfrac{2-6x}{13}=x-\dfrac{5x-\frac{1}{4}(10-3x)}{39}$.

48. $\dfrac{3x-\frac{2}{3}(1+x)}{4}+\dfrac{1-\frac{1}{5}x}{5\frac{1}{2}}=\dfrac{2\frac{2}{5}+\frac{1}{25}(x-1)}{2\frac{1}{5}}$.

49. $\frac{1}{3}(x-a)-\frac{1}{5}(2x-3b)-\frac{1}{2}(a-x)=10a+11b$.

50. $\dfrac{2x+a}{b}-\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{3ax+(a-b)^2}{ab}$.

51. $\dfrac{2x+1}{29}-\dfrac{402-3x}{12}=9-\dfrac{471-6x}{2}$.

52. $\dfrac{15-\frac{2}{3}x}{}-\dfrac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\dfrac{17-\frac{14}{3}x}{3}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874.]

113. দশমিক-ভগ্নাংশবিশিষ্ট সমীকরণঃ আবশ্যক হইলে, মিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া সমীকরণ সমাধান করা যাইতে রে।

উদা. 1. সমাধান করঃ $\dfrac{x-2}{\cdot 0\dot{5}}-\dfrac{x-4}{\cdot 0625}=56$.

যেহেতু, $\cdot 0\dot{5}=\dfrac{5}{90}=\dfrac{1}{18}$ এবং $\cdot 0625=\dfrac{625}{10000}=\dfrac{1}{16}$,

অতএব, $\dfrac{x-2}{\frac{1}{18}}-\dfrac{x-4}{\frac{1}{16}}=56$,

অথবা, $18(x-2)-16(x-4)=56$, অথবা, $2x+28=56$;

$\therefore\quad 2x=28$, অথবা, $x=14$.

উদা. 2. সমাধান করঃ $\cdot 65x+\dfrac{\cdot 585x-\cdot 975}{\cdot 6}=\dfrac{1\cdot 56}{\cdot 2}-\dfrac{\cdot 39x-\cdot 78}{\cdot 9}$.

যেহেতু, $\dfrac{\cdot 585x-\cdot 975}{\cdot 6}=\dfrac{5\cdot 85x-9\cdot 75}{6}=\dfrac{1\cdot 95x-3\cdot 25}{2}$;

$\dfrac{1\cdot 56}{\cdot 2}=\dfrac{15\cdot 6}{2}=7\cdot 8$; এবং $\dfrac{\cdot 39x-\cdot 78}{\cdot 9}=\dfrac{3\cdot 9x-7\cdot 8}{9}=\dfrac{1\cdot 3x-2\cdot 6}{3}$;

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইলঃ

$$\cdot 65x+\frac{1\cdot 95x-3\cdot 25}{2}=7\cdot 8-\frac{1\cdot 3x-2\cdot 6}{3}$$

সুতরাং, উভয় পক্ষকেই 6 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3\cdot 9x+(5\cdot 85x-9\cdot 75)=46\cdot 8-(2\cdot 6x-5\cdot 2).$$

পক্ষান্তর করিয়া, $(3{\cdot}9+5{\cdot}85+2{\cdot}6)x=46{\cdot}8+5{\cdot}2+9{\cdot}75$,

অথবা, $12{\cdot}35x=61{\cdot}75$;

$$\therefore \quad x=\frac{61{\cdot}75}{12{\cdot}35}=5.$$

প্রশ্নমালা 60

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\cdot5x-\cdot\dot{2}x=\cdot\dot{3}x-1{\cdot}5.$

2. $3{\cdot}75x+\cdot5=2{\cdot}25x+8.$

3. $1{\cdot}2x-\frac{\cdot18x-\cdot05}{\cdot5}=\cdot4x+8{\cdot}9.$

4. $\frac{x+\cdot75}{\cdot125}-\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=15.$

5. $\frac{x}{\cdot5}-\frac{1}{\cdot05}+\frac{x}{\cdot005}-\frac{1}{\cdot0005}=0.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

6. $\cdot5x+\frac{\cdot45x-\cdot75}{\cdot6}=\frac{1{\cdot}2}{\cdot2}-\frac{\cdot3x-\cdot6}{\cdot9}.$

7. $\cdot7x+\cdot\dot{4}=\cdot6\dot{7}x+\cdot\dot{5}.$

8. $\cdot15x+\frac{\cdot135x-\cdot225}{\cdot6}=\frac{\cdot36}{\cdot2}-\frac{\cdot09x-\cdot18}{\cdot9}.$

9. $\cdot5x+\frac{\cdot02x+\cdot07}{\cdot03}-\frac{x+2}{9}=9{\cdot}5.$

10. $\cdot011x+\frac{\cdot001x-\cdot125}{\cdot6}=\frac{5-x}{\cdot03}-\cdot145.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

114. সুবিধামত 'পদ-সংযোগ' ও 'পক্ষান্তরকরণ' প্রক্রিয়া দ্বারা সমীকরণ সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{23x-29}{12}+\frac{19x+13}{7}=\frac{97x+72\frac{1}{2}}{35}-\frac{7x-8\frac{1}{3}}{4}.$

এখন পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{23x-29}{12}-\frac{7x-8\frac{1}{3}}{4}=\frac{97x+72\frac{1}{2}}{35}-\frac{19x+13}{7},$$

অথবা, $$\frac{(23x-29)-(21x-25)}{12}=\frac{(97x+72\frac{1}{2})-(95x+65)}{35},$$

অথবা, $$\frac{x-2}{6}=\frac{2x+7\frac{1}{2}}{35}.$$

এখন, উভয় পক্ষকেই 6×35 দ্বারা গুণ করিয়া,

$35x - 70 = 12x + 45$ পাওয়া গেল।

সুতরাং, $23x = 115$; অথবা, $x = 5$.

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{x - a(b+c)}{bc} + \dfrac{x - b(c+a)}{ca} + \dfrac{x - c(a+b)}{ab} = 3.$

সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখা যাইতে পারে ; যথা,

$$\frac{x - a(b+c)}{bc} + \frac{x - b(c+a)}{ca} + \frac{x - c(a+b)}{ab} = 1 + 1 + 1.$$

এখন পক্ষান্তর করিয়া,

$$\left\{\frac{x - a(b+c)}{bc} - 1\right\} + \left\{\frac{x - b(c+a)}{ca} - 1\right\} + \left\{\frac{x - c(a+b)}{ab} - 1\right\} = 0 ;$$

অথবা, $\dfrac{x - a(b+c) - bc}{bc} + \dfrac{x - b(c+a) - ca}{ca} + \dfrac{x - c(a+b) - ab}{ab} = 0$;

অথবা, $\dfrac{x - (ab + ac + bc)}{bc} + \dfrac{x - (ca + cb + ab)}{ca} + \dfrac{x - (ca + cb + ab)}{ab} = 0,$

অথবা, $\{x - (ab + bc + ca)\}\left\{\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab}\right\} = 0$;

$\therefore \quad x - (ab + bc + ca) = 0.$

অতএব, $x = ab + bc + ca.$

প্রশ্নমালা 61

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\dfrac{5x+6}{4} + \dfrac{64x - 35}{15} = \dfrac{20x + 23}{16} + \dfrac{13x - 7}{3}.$

2. $\dfrac{17x - 13}{9} + \dfrac{108x + 75}{32} = \dfrac{27x + 19}{8} + \dfrac{50\frac{7}{16}x - 39}{27}.$

3. $\dfrac{29x - 18}{8} + \dfrac{189x - 93}{49} = \dfrac{86\frac{13}{21}x - 54}{24} + \dfrac{27x - 13}{7}.$

4. $\dfrac{16x - 17}{9} - \dfrac{23x - 15}{16} = \dfrac{142\frac{7}{16}x - 153}{81} - \dfrac{92x - 65}{64}.$

5. $\dfrac{18x - 19}{7} + \dfrac{135x + 62\frac{1}{2}}{65} = \dfrac{27x + 14}{13} + \dfrac{106\frac{5}{13}x - 114}{42}.$

6. $\dfrac{33-19x}{15}-\dfrac{41+27x}{28}+\dfrac{164+107\frac{11}{15}x}{112}-\dfrac{164\frac{13}{28}-95x}{75}=0.$

7. $\dfrac{18-41x}{9}-\dfrac{17-16x}{8}+\dfrac{9\frac{16}{21}-10x}{5}-\dfrac{14-32x}{7}=0.$

8. $\dfrac{x-a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{x-b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{\;}{a^2+b^2}=3.$

9. $\dfrac{3x-bc}{b+c}+\dfrac{3x-ca}{c+a}+\dfrac{3x-ab}{a+b}=a+b+c.$

10. $\dfrac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\dfrac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\dfrac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c).$

11. $\dfrac{x-(b^3+c^3)}{a^2-3bc}+\dfrac{x-(c^3+a^3)}{b^2-3ca}+\dfrac{x-(a^3+b^3)}{c^2-3ab}=a+b+c.$

12. $\dfrac{p^2x+(l^3+m^3)}{l^2-lm+m^2}+\dfrac{q^2x+(m^3+n^3)}{m^2-mn+n^2}+\dfrac{r^2x+(n^3+l^3)}{n^2-ln+l^2}=2(l+m+n)$

II. সমীকরণ সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী (Equational Problems)

115. 'সরল সমীকরণ' সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নাবলী প্রতীক (symbols) সাহায্যে প্রকাশ করিয়া, উহাদের সমাধান করার প্রণালী ষষ্ঠ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ জাতীয় জটিলতর প্রশ্ন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, এই জাতীয় প্রশ্ন সমাধানের পক্ষে, প্রশ্নগুলিকে প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ করাই প্রধানতঃ অসুবিধাজনক। অতএব, ইহাতে দক্ষতা লাভের জন্য শিক্ষার্থিগণের এই জাতীয় প্রশ্নানুশীলনে বিশেষ অভ্যাস থাকা উচিত্।

যদিও এই সকল প্রশ্ন সমাধান করার কোন সাধারণ নিয়ম দেওয়া যায় না, তথাপি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিলে, অনেক সুবিধা হইবে বলিয়া আশা করা যায়:

(1) কোন প্রশ্নকে বহুবার পড়িয়া ভালরূপে উহার অর্থ বুঝিয়া লও।

(2) প্রশ্নের নির্ণেয় রাশিকে x দ্বারা সূচিত কর।

(3) প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তসমূহ x এর সাহায্যে প্রকাশ করিয়া একটি সরল সমীকরণ লিখ।

(4) সর্ব্বশেষে, এই সমীকরণ সমাধান করিয়া x এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী উত্তমরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

[ষষ্ঠ অধ্যায়ের উদাহরণগুলিও দেখ।]

উদা. 1. 20 বৎসর পূর্ব্বে এক ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের পাঁচগুণ ছিল; 16 বৎসর পরে পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স কত?

এস্থলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় করিতে হইবে; অতএব, ইহাকে x দ্বারা সূচিত কর।

$\therefore$ 20 বৎসর পূর্ব্বে, পিতার বয়স $=(x-20)$ বৎসর;

আবার, 16 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইবে;

$\therefore$ পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $=41-16$ অর্থাৎ 25 বৎসর;

অতএব, 20 বৎসর পূর্ব্বে, পুত্রের বয়স $=25-20$ অর্থাৎ 5 বৎসর;

কাজেই, প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $x-20=5\times5$;

অথবা, $x=20+5\times5=20+25=45$ বৎসর।

সুতরাং, পিতার বর্ত্তমান বয়স 45 বৎসর।

উদা. 2. পাঁচটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার যোগফল 1185 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটিকে x দ্বারা সূচিত কর। এখন, যেহেতু যে কোন দুইটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার অন্তরফল 1 (এক), সুতরাং অন্যান্য সংখ্যাগুলি যথাক্রমে $x+1$, $x+2$, $x+3$ এবং $x+4$ হইবে।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=1185;$$

অথবা, $$5x+10=1185;$$

অথবা, $$5x=1185-10=1175;$$

$$x=\frac{1175}{5}=235.$$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি 235 হওয়ায়, উহারা যথাক্রমে 235, 236, 237, 238 এবং 239 হইবে।

উদা. 3. দুই ব্যক্তি একই সময়ে A হইতে যাত্রা করিল; একজন ঘোড়ায় চড়িয়া ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ মাইল গতিতে এবং অন্য ব্যক্তি রেল গাড়ীতে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল; যদি প্রথমোক্ত ব্যক্তি শেষোক্ত ব্যক্তি হইতে 30 মিনিট পরে B তে পৌছায়, তাহা হইলে, A হইতে B এর দূরত্ব কত, তাহা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1873.]

ধর, মাইল এককের তুলনায়, A হইতে B এর দূরত্ব-মান $=x$. তাহা হইলে, A হইতে B তে যাইতে, প্রথমোক্ত ব্যক্তির সময় $=\frac{x}{7\frac{1}{2}}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ $\frac{2x}{15}$ ঘণ্টা, এবং শেষোক্ত ব্যক্তির সময় $=\frac{x}{30}$ ঘণ্টা।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{2x}{15}=\frac{x}{30}+\frac{1}{2} \quad [\text{30 মিনিট} = \tfrac{1}{2} \text{ ঘণ্টা}]$$

অথবা, $4x = x + 15$;

অথবা, $3x = 15$; কাজেই, $x = 5$.

অতএব, A হইতে B এর দূরত্ব $= 5$ মাইল।

উদা. 4. এক ব্যক্তিকে তাঁহার বয়সের কথা জিজ্ঞাসা করা হইলে, তিনি উত্তর করিলেন, "10 বৎসর পূর্ব্বে, আমার পুত্রের বয়স হইতে আমার বয়স পাঁচগুণ বেশী ছিল, কিন্তু 20 বৎসর পরে, আমার বয়স আমার পুত্রের বয়সের কেবলমাত্র দ্বিগুণ হইবে।" ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স কত ?

ধর, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $= x$ বৎসর। তাহা হইলে, 10 বৎসর পূর্ব্বে, ঐ ব্যক্তির বয়স $= (x - 10)$ বৎসর; এবং পুত্রের বয়স $= \frac{1}{5}(x - 10)$ বৎসর। সুতরাং, পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $= \{\frac{1}{5}(x - 10) + 10\}$ বৎসর। কাজেই, 20 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স $= \{\frac{1}{5}(x - 10) + 30\}$ বৎসর এবং স্পষ্টতঃই পিতার বয়স $= (x + 20)$ বৎসর হইবে।

অতএব, প্রদত্ত দ্বিতীয় সর্ত্তানুসারে,

$$x + 20 = 2\{\tfrac{1}{5}(x - 10) + 30\}$$

$$= \tfrac{2}{5}(x - 10) + 60;$$

$$\therefore\ 5x + 100 = 2x - 20 + 300;$$

$$\therefore\ 3x = 180; \qquad \therefore\ x = 60.$$

অর্থাৎ, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $= 60$ বৎসর।

উপরোক্ত উদাহরণে, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $5x$ বৎসর ধরিয়া লইলে, প্রক্রিয়াতে কোন ভগ্নাংশবিশিষ্ট পদ থাকিত না।

উদা. 5. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A তাহার আয়ের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল; কিন্তু B, A হইতে বৎসরে £80 অধিক ব্যয় করিয়া, চারি বৎসর পরে £220 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় কত ?

ধর, প্রত্যেকের বাৎসরিক আয়ের পরিমাণ £x. তাহা হইলে, A বৎসরে £$\frac{4}{5}x$ খরচ করে; সুতরাং B বৎসরে £$(\frac{4}{5}x + 80)$ খরচ করে; এবং এই পরিমাণ খরচ করিয়া B চারি বৎসরে £220, অর্থাৎ এক বৎসরে £55 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। কাজেই, এক বৎসরে B এর আয় অপেক্ষা ব্যয়, £55 পরিমিত বেশী।

অতএব, $x = (\frac{4}{5}x + 80) - 55$; অথবা, $\frac{1}{5}x = 25$; $\therefore\ x = 125$.

সুতরাং, A ও B প্রত্যেকেই বৎসরে £125 আয় করে।

উদা. 6. একজন স্ত্রীলোক কতকগুলি ডিম প্রতি পেনিতে দুইটা দরে, এবং সমান সংখ্যক ডিম প্রতি পেনিতে তিনটা দরে, ক্রয় করিয়া সমস্ত ডিম প্রতি দুই পেনিতে পাঁচটা দরে বিক্রয় করিল ; ইহাতে তাহার 4 পেনি লোকসান হইলে, সে মোট কতগুলি ডিম কিনিয়াছিল ?

ধর, তাহার ক্রীত ডিমের সংখ্যা $=x$. তাহা হইলে, যখন মোট ডিমের অর্দ্ধ-সংখ্যা, পেনি প্রতি দুইটা দরে, এবং অর্দ্ধ সংখ্যা, পেনি প্রতি তিনটা দরে, কেনা হইয়াছে ;

অতএব, সমস্ত ডিমের ক্রয়-মূল্য

$$=\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) \text{ পেন্স্} =\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right) \text{ পেন্স্।}$$

সমস্ত ডিম প্রতি দুই পেনিতে 5 টা করিয়া বিক্রয় করিয়া লব্ধ মূল্য $=x\times\frac{2}{5}$ পেন্স্।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $\frac{2x}{5}=\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)-4$;

অথবা, $24x=15x+10x-240$; $\therefore\ x=240$.

অতএব, সে 240 টা ডিম কিনিয়াছিল।

উদা. 7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি দশকস্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ ; এবং ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি হইতে 2 বাদ দিলে বিয়োগফল সংখ্যাটির এক-ষষ্ঠাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

ধর, সংখ্যাটির দশকস্থানীয় অঙ্ক $=x$; তাহা হইলে এককস্থানীয় অঙ্ক $=2x$;

সংখ্যাটি $=10x+2x$;

$=12x$. [65 নিয়মের পরবর্ত্তী চতুর্থ উদাহরণ দেখ।]

কাজেই, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$(x+2x)-2=\frac{12x}{6}\ ; \quad \text{অথবা, } 18x-12=12x\ ;$$

অথবা, $6x=12$; $\therefore\ x=2$.

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $=24$.

প্রশ্নমালা 62

1. একখানি জমির দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ ; উহা হইতে দৈর্ঘ্যে 50 গজ এবং প্রস্থে 10 গজ বড় আর একখানি জমির আয়তন পূর্ব্বোক্ত জমির আয়তন হইতে 6800 বর্গগজ বেশী। প্রত্যেকখানি জমির পরিমাণ নির্ণয় কর।

2. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 3 ফুট বেশী। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট কমাইলে এবং প্রস্থ 3 ফুট বাড়াইলে, উহার ক্ষেত্রফলের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না; ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

3. A ও B সমপরিমাণ অর্থ লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিল; খেলায় B তাহার অর্থের $\frac{5}{11}$ অংশ হারিল এবং A, B এর অবশিষ্ট অর্থের অর্দ্ধ হইতে £6 বেশী লাভ করিল। প্রত্যেকে কত লইয়া খেলা আরম্ভ করিয়াছিল?

4. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর; আবার, পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ করিলে উহা পিতার বয়স অপেক্ষা 10 বৎসর বেশী হয়; প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

5. এক ব্যক্তি কতিপয় পুরুষ ও স্ত্রীলোকের মধ্যে £5 এরূপে ভাগ করিয়া দিল যে, প্রত্যেক পুরুষ 3 শি. এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইল। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

6. 154 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি স্থান হইতে যথাক্রমে A ও B নামক দুই ব্যক্তি পথিমধ্যে মিলিত হইবার নিমিত্ত একই সময়ে যাত্রা করিল; A, প্রতি দুই ঘণ্টায় 3 মাইল হিসাবে এবং B, প্রতি চারি ঘণ্টায় 5 মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাহারা কখন এবং কোথায় মিলিত হইল?

7. একজন মজুরকে 36 দিনের জন্য এই সর্ত্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, তাহার কাজের জন্য সে দৈনিক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে, কিন্তু অনুপস্থিত হইলে, প্রত্যেক দিনের জন্য তাহাকে 1 শি. 6 পে. করিয়া ক্ষতিপূরণ দিতে হইবে। নির্দ্দিষ্ট সময়ের পর সে মোট 58 শি. পাইয়া থাকিলে, সে কতদিন কাজ করিয়াছিল?

8. এক ব্যক্তি যে মূল্যে একখানি ছবি কিনিলেন, সেই পরিমাণ খরচেই উহা বাঁধাইলেন; যদি বাঁধাই খরচ £1 কম এবং ছবির মূল্য 15 শি. বেশী হইত, তাহা হইলে, বাঁধাই খরচ ছবির মূল্যের ঠিক অর্দ্ধ হইত; ছবির মূল্য নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1860.]

9. একটি খুঁটির এক-চতুর্থাংশ কাদার ভিতর, এক-তৃতীয়াংশ জলের ভিতর এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1863.]

10. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্য এই সর্ত্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, কাজ করিলে প্রতিদিন সে 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে এবং কাজ না করিলে প্রতিদিনের জন্য তাহার এক শিলিং করিয়া কাটা যাইবে। সে মোট £2. 7 শি. পাইয়া থাকিলে কতদিন সে কাজ করিয়াছিল এবং কতদিনই বা সে বসিয়া কাটাইয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

11. A একটি কাজ 9 দিনে শেষ করিতে পারে, B এর উহা করিতে দ্বিগুণ সময় লাগে এবং C একদিনে A এর দৈনিক কাজের পরিমাণের $\frac{3}{4}$ অংশ করিতে পারে। A, B, C একত্রযোগে কাজ করিলে, কতদিনে উহা শেষ করিতে পারিবে ?

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

12. £54. 12 শি. এর ভিতর যত সংখ্যক পাউণ্ড্ ঠিক তত সংখ্যক শিলিং আছে ; প্রত্যেকের সংখ্যা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1885.]

13. A, B ও C এর মধ্যে কতক পরিমাণ অর্থ এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, A সমস্ত অর্থের অর্দ্ধ হইতে £30 কম, B সমস্ত অর্থের এক-তৃতীয়াংশ হইতে £10 কম এবং C সমস্ত অর্থের এক-চতুর্থাংশ হইতে £8 বেশী পাইল। প্রত্যেকে কত করিয়া পাইল ?

14. একজন লোক কতকগুলি ভেড়া কিনিতে যাইয়া দেখিতে পাইল যে, প্রতি ভেড়া £2. 2 শি. দরে কিনিলে ভেড়াগুলির মোট মূল্য দিতে তাহার £1. 8 শি. কম পড়িবে ; কিন্তু প্রতি ভেড়া £2 দরে কিনিতে পারিলে উহাদের মূল্য দেওয়ার পর তাহার তহবিলে £2 উদ্বৃত্ত থাকিবে। সে কতগুলি ভেড়া কিনিতে গিয়াছিল এবং তাহার তহবিলই বা কত ছিল ?

15. ইয়র্ক এবং লণ্ডন, 200 মাইল দূরবর্ত্তী এই দুইটি শহর হইতে দুইখানা গাড়ী একই সময়ে রওনা হইল ; একখানা ঘণ্টায় $9\frac{1}{2}$ মাইল এবং অন্যখানা ঘণ্টায় $9\frac{1}{4}$ মাইল বেগে চলিতে থাকিলে, রওনা হওয়ার কতক্ষণ পরে এবং কতদূরে তাহারা মিলিত হইবে ?

16. আমি কতকগুলি আতা প্রতি পেনিতে তিনটি দরে এবং উহার $\frac{5}{8}$-সংখ্যক আতা প্রতি পেনিতে চারিটি দরে কিনিয়া, একত্রে প্রতি 6 পেন্সে 16 টি দরে সমস্ত আতা বিক্রয় করিয়া মোট $3\frac{1}{2}$ পেন্স্ লাভ করিলাম। আমি কতগুলি আতা কিনিয়াছিলাম ?

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5, এবং বামদিকের অঙ্কটির সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির এক-অষ্টমাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশকস্থানীয় অঙ্কটি এককস্থানীয় অঙ্কটি হইতে 5 বড় ; এবং সংখ্যাটি হইতে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির পাঁচগুণ বিয়োগ করিলে সংখ্যাস্থিত অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

19. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5 এবং দশকস্থানীয় অঙ্কটির দশগুণের সহিত এককস্থানীয় অঙ্কটির চতুর্গুণ যোগ করিলে, সংখ্যাস্থিত অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

20. 39 কে এরূপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 2 বাদ দিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

21. 60 কে এরূপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগ হইতে 3 বাদ দিলে, দ্বিতীয় ভাগের সহিত 11 যোগ করিলে, তৃতীয় ভাগকে 4 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

22. 116 কে এরূপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 5 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 4 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

অষ্টাদশ অধ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations) এবং তৎসম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী (Problems)

I. সরল সহ-সমীকরণ

116. ভূমিকা: $x-y=2$ সমীকরণটিতে x ও y এই দুইটি অজ্ঞাতরাশি বর্তমান এবং স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অজ্ঞাতরাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে; কারণ, যে সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল 2 হইবে, সেই সংখ্যাদ্বয় দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। [যথা, $x=4$, $y=2$; বা, $x=5$, $y=3$; বা, $x=6$, $y=4$; বা, $x=-3$, $y=-5$; ইত্যাদি।] অধিকন্তু, যদি দেওয়া থাকে যে, x ও y, $x+y=8$ সমীকরণটিকেও সিদ্ধ করিবে, তাহা হইলে পূর্বোল্লিখিত বিভিন্ন সংখ্যাযুগলের মধ্যে যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 8 হইবে, তাহাদিগকেই নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$$

এই সমীকরণদ্বয় x ও y এর একই মান দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হইতে পারে, কেবলমাত্র যদি $x=5$ এবং $y=3$ হয়।

আবার দেখা যাইতে পারে যে,

$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=4$$
$$x+y-z=2$$

এই সমীকরণ তিনটির প্রত্যেকটি স্বতন্ত্রভাবে x, y ও z এর অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারিলেও, উহারা কেবলমাত্র $x=3$, $y=1$ এবং $z=2$ এই মান তিনটি দ্বারাই যুগপৎ সিদ্ধ হইবে।

উপরোক্ত সমীকরণগুলির ন্যায়, দুই বা ততোধিক সমীকরণের প্রত্যেকটিই যদি উহাদের অন্তর্গত অজ্ঞাতরাশিসমূহের **একই** মান দ্বারা **যুগপৎ** সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ সমীকরণগুলিকে **সহ-সমীকরণ** (simultaneous equation) বলে। সমীকরণস্থিত অজ্ঞাতরাশিগুলির প্রত্যেকটিই একশক্তিবিশিষ্ট হইলে এবং সমীকরণে উহাদের দুই বা তদধিকের গুণফলবিশিষ্ট কোন পদ না থাকিলে, সমীকরণটিকে **সরল** বা **একশক্তি-সমীকরণ** বলা হয়।

প্রথমতঃ আমরা দুই বর্ণ (বা অজ্ঞাতরাশি)-বিশিষ্ট সরল সহ-সমীকরণ সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই প্রকার সমীকরণ সমাধান করিবার সাধারণতঃ তিনটি পদ্ধতি আছে ; উহাদিগকে যথাক্রমে নিম্নলিখিতরূপে সন্নিবেশিত করা যাইতেছে।

117. প্রথম পদ্ধতি ঃ সমীকরণদ্বয়ের **যে কোনটি** হইতে, অজ্ঞাতরাশিদ্বয়ের যে কোনটির মান অপরটি দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ঐ লব্ধ মান **অন্য** সমীকরণটিতে স্থাপন কর।

উদা. 1. সমাধান কর ঃ $\left.\begin{array}{r}5x-24y=16\\4x-y=31\end{array}\right\}$

দ্বিতীয় সমীকরণটি হইতে দেখা যায় যে, $y=4x-31$ ... ... (1)

y এর এই লব্ধ মান প্রথম সমীকরণটিতে y এর পরিবর্তে বসাইলে,

$$5x-24(4x-31)=16\ ;$$

অথবা, $5x-96x+744=16$, পাওয়া যায়।

$\therefore\quad -91x=-728\ ;\quad \therefore\quad x=8.$

অতএব, (1) হইতে, $y=4\times8-31=1$ পাওয়া গেল।

সুতরাং, $x=8$ এবং $y=1$; ইহাই নির্ণেয় বীজ (root)।

টীকা। x ও y এর এই লব্ধ মানদ্বয় সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটিতে x ও y এর পরিবর্তে বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত যে, উহারা সমীকরণদ্বয়কে প্রকৃতপক্ষে সিদ্ধ করে।

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}$; $8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$.

প্রথম সমীকরণের উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা গুণ কর ;

অতএব, $5(3x-5y)+30=2(2x+y)$,

অথবা, $15x-25y+30=4x+2y$;

$\therefore \quad 11x=27y-30. \qquad (1)$

দ্বিতীয় সমীকরণের উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা গুণ কর ;

অতএব, $96-3(x-2y)=6x+4y$,

অথবা, $96-3x+6y=6x+4y$,

$\therefore \quad 2y-9x+96=0. \qquad (2)$

(1) হইতে $x=\frac{27y-30}{11}$. ... .. (3)

x এর এই মান (2) তে x এর পরিবর্তে বসাও ;

অতএব, $2y-\frac{9(27y-30)}{11}+96=0$;

$\therefore \quad 22y-9(27y-30)+1056=0$,

অথবা, $22y-243y+270+1056=0$;

$\therefore \quad 221y=1326$; $\quad \therefore \quad y=6$.

কাজেই, (3) হইতে, $x=\frac{27\times 6-30}{11}=\frac{132}{11}=12$.

সুতরাং, $x=12$ ও $y=6$.

প্রশ্নমালা 63

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{l} x+4y=14 \\ 7x-3y=5 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 5x-8y=9 \\ 13x+7y=79 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=32 \\ 11y-9x=3 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 9x-4y=8 \\ 13x+7y=101 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} x+ay=b \\ ax-by=c \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 2x-\frac{1}{5}(y-3)=4 \\ 3y+\frac{1}{3}(x-2)=9 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{3}(2x+4) \\ \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{2}(x-24) \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{4}(y-1) \\ \frac{1}{7}(4x-5y)=x-7 \end{array}\right\}$

[কলি: প্রবেশিকা, 1872.]

9. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5}(3x-2y)-3=\frac{1}{4}(2x-y) \\ \frac{1}{2}(5x-4y)-3=\frac{1}{3}(4x-3y) \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}(2x+3y)+\frac{1}{3}x=8 \\ \frac{1}{2}(7y-3x)-y=11 \end{array}\right\}$

118. দ্বিতীয় পদ্ধতি : সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে, অজ্ঞাতরাশি দুইটির যে কোনটির (ধর, y এর) মান অপর অজ্ঞাতরাশিটি (অর্থাৎ x) দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ঐ লব্ধ মানদ্বয়ের সমতা স্থাপন কর।

উদা. 1. সমাধান কর : $6x-5y=11, \quad 2x+3y=27.$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $5y=6x-11,$

$$\therefore \quad y=\frac{6x-11}{5} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $3y=27-2x,$

$$\therefore \quad y=\frac{27-2x}{3}; \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\dfrac{6x-11}{5}=\dfrac{27-2x}{3};$

$$\therefore \quad 3(6x-11)=5(27-2x);$$

অথবা, $18x-33=135-10x;$

$$\therefore \quad 28x=168; \qquad \therefore \quad x=6.$$

সুতরাং, (1) হইতে, $y=\dfrac{6\times 6-11}{5}=5.$

অতএব, $x=6$ এবং $y=5.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{7+x}{5}-\dfrac{2x-y}{4}=3y-5\\[2ex] \dfrac{5y-7}{2}+\dfrac{4x-3}{6}=18-5x.\end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.]

প্রথম সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 20 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4(7+x)-5(2x-y)=20(3y-5);$$

অথবা, $28-6x+5y=60y-100;$

$$\therefore \quad 55y+6x=128. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায় যে,

$$3(5y-7)+(4x-3)=6(18-5x);$$

অথবা, $15y-21+4x-3=108-30x.$

$$\therefore \quad 34x+15y=132. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $y = \frac{128 - 6x}{55}$ ... ... (3)

এবং (2) হইতে, $y = \frac{132 - 34x}{15}$ ... ... (4)

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে,

$$\frac{128 - 6x}{55} = \frac{132 - 34x}{15}; \quad \text{অথবা,} \quad \frac{64 - 3x}{11} = \frac{66 - 17x}{3};$$

[উভয় পক্ষকে $\frac{5}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore$ $3(64 - 3x) = 11(66 - 17x)$;

অথবা, $192 - 9x = 726 - 187x$;

$\therefore$ $178x = 534$; $\therefore$ $x = 3$.

অতএব, (3) হইতে, $y = \frac{128 - 6 \times 3}{55} = \frac{110}{55} = 2$.

সুতরাং, $x = 3$ এবং $y = 2$.

প্রশ্নমালা 64

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 9 \\ 5y + 2x = 16 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 3y - 4x = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 3x - 7y = 7 \\ 11x + 5y = 87 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} y(3 + x) = x(7 + y) \\ 4x + 9 = 5y - 14 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 32x - 25y = 28 \\ 14x + 15y = 116 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{7}(3x + y) = \frac{1}{5}(2x + y + 1) \\ 8 - \frac{1}{5}(x - y) = 6 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1}\frac{1}{3}(5x - 6y) + 3x = 4y - 2 \\ \frac{1}{8}(5x + 6y) - \frac{1}{4}(3x - 2y) = 2y - 2 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{4}(y + 3) = 7 + \frac{1}{5}(3y - 2x) \\ 4y + \frac{1}{3}(x - 2) = 26\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2y + 1) \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{3}(2y - 1) = 3\frac{5}{24} + \frac{1}{4}(3x - 2y) \\ 4y - \frac{1}{4}(5 - 2x) = 6 - \frac{1}{5}(3 - 2y) \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1873.]

10. $\frac{x}{3} - \frac{2}{y} = 1, \ \frac{x}{4} + \frac{3}{y} = 3.$ [এলাহাবাদ, 1923.]

119. তৃতীয় পদ্ধতি : সমীকরণদ্বয়কে এরূপ দুইটি সংখ্যাদ্বারা গুণ কর যে, গুণনোৎপন্ন সমীকরণ দুইটিতে, অজ্ঞাতরাশিদ্বয়ের যে কোনটির সহগদ্বয় উভয় সমীকরণেই সমান হইবে ; তাহা হইলে, এই শেষোক্ত সমীকরণ দুইটির যোগ বা বিয়োগ

দ্বারা এরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, যাহাতে একটিমাত্র অজ্ঞাতরাশি বর্ত্তমান থাকিবে।

উদা. 1. সমাধান কর: $\left.\begin{aligned} 3x-4y&=5 \\ 5x+2y&=17 \end{aligned}\right\}$

দ্বিতীয় সমীকরণটিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $10x+4y=34$ পাওয়া গেল;
এবং প্রথম সমীকরণটি $3x-4y=5$

অতএব, যোগ করিয়া, $13x=39$; $\therefore$ $x=3$.

প্রথম সমীকরণে x এর এই মান বসাইলে, $4y=9-5=4$; $\therefore$ $y=1$.

অতএব, $x=3$ এবং $y=1$.

উদা. 2. সমাধান কর: $\left.\begin{aligned} 5x+9y&=89 \\ 2x-17y&=15 \end{aligned}\right\}$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিকে 2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 5 দ্বারা গুণ কর।

সুতরাং, $10x+18y=178$
এবং $10x-85y=75$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $103y=103$; $\therefore$ $y=1$.

দ্বিতীয় সমীকরণে y এর এই মান বসাইলে,

$2x=15+17=32$; $\therefore$ $x=16$.

অতএব, $x=16$ এবং $y=1$.

। উপরোক্ত প্রক্রিয়ার পরিবর্ত্তে, প্রথম সমীকরণটিকে 17 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 9 দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ সমীকরণদ্বয়কে যোগ করিলে x এর মান নির্ণয়ক সমীকরণটি প্রথমে পাওয়া যাইত। উপরোক্ত প্রক্রিয়া অবলম্বনের কারণ এই যে, উভয় সমীকরণেই x এর সহগ ছোট সংখ্যা হওয়ায় গুণনকার্য্য সহজসাধ্য হইয়াছে।

উদা. 3. সমাধান কর: $\left.\begin{aligned} 23x-24y&=21 \\ 25x-16y&=43 \end{aligned}\right\}$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিকে 2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে,

$\left.\begin{aligned} 46x-48y&=42 \\ 75x-48y&=129 \end{aligned}\right\}$ পাওয়া যায়

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $29x=87$; $\therefore$ $x=3$.

দ্বিতীয় সমীকরণটিতে x এর এই মান বসাইলে

$$16y = 75 - 43 = 32\ ; \qquad \therefore \quad y = 2.$$

$$\text{সুতরাং,} \quad x = 3 \quad \text{এবং} \quad y = 2.$$

টীকা। এস্থলে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, গুণন-লব্ধ সমীকরণদ্বয়ে y এর সহগ, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের y এর সহগ দুইটির ল. সা. গু.। সকল ক্ষেত্রেই এইরূপ করা উচিত, নতুবা গুণন-প্রক্রিয়া অযথা কষ্টসাধ্য হইয়া পড়ে।

উদা. 4. সমাধান কর :

$$\frac{x-2}{2} - \frac{x+y}{14} = \frac{x-y-1}{8} - \frac{y+12}{4},$$

$$\frac{x+7}{3} + \frac{y-5}{10} = 1 - x - \frac{5(y+1)}{7}$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$\frac{7(x-2)-(x+y)}{14} = \frac{(x-y-1)-2(y+12)}{8}\ ;$$

অথবা, $$\frac{6x-y-14}{7} = \frac{x-3y-25}{4},$$

অথবা, $$24x - 4y - 56 = 7x - 21y - 175,$$

অথবা, $$17x + 17y = -119\ ;$$

অথবা, $$x + y = -7. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে,

$$\frac{10(x+7)+3(y-5)}{30} = \frac{7(1-x)-5(y+1)}{7}\ ;$$

অথবা, $$\frac{10x+3y+55}{30} = \frac{2-7x-5y}{7},$$

অথবা, $$70x + 21y + 385 = 60 - 210x - 150y\ ;$$

$$\therefore \quad 280x + 171y = -325. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) কে 171 দ্বারা গুণ করিয়া, $171x + 171y = -1197\ ;$

আবার, $280x + 171y = -325.$

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $109x = 872\ ; \qquad \therefore \quad x = 8.$

x এর এই মান (1) তে বসাইয়া, $y = -7 - 8 = -15.$

অতএব, $x = 8$ এবং $y = -15.$

5. সমাধান কর : $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$

$$\frac{7}{x} + \frac{4}{y} = 1\tfrac{7}{8}.$$

প্রথম সমীকরণটিকে 4 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = 4 \quad \text{এবং} \quad \frac{21}{x} + \frac{12}{y} = \frac{45}{8}.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $\dfrac{13}{x} = \dfrac{13}{8}$; $\therefore\ x = 8.$

প্রথম সমীকরণে x এর মান বসাইয়া,

$$\frac{3}{y} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \qquad \therefore\ y = 4.$$

স্বতরাং, $x = 8$ এবং $y = 4$.

প্রশ্নমালা 65

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{aligned} 7x - 5y &= 11 \\ 3x + 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$ **2.** $\left.\begin{aligned} 13x + 6y &= 58 \\ 5x - 11y &= 9 \end{aligned}\right\}$ **3.** $\left.\begin{aligned} 8x - 9y &= 20 \\ 7x - 10y &= 9 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} 25x - 14y &= 8 \\ 12x + 7y &= 45 \end{aligned}\right\}$ **5.** $\left.\begin{aligned} 12x + 11y &= 70 \\ 8x - 7y &= 18 \end{aligned}\right\}$ **6.** $\left.\begin{aligned} 13x - 14y &= 22 \\ 17x - 21y &= 18 \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} 28x - 15y &= 41 \\ 21x + 13y &= 55 \end{aligned}\right\}$ **8.** $\left.\begin{aligned} 19x + 24y &= 34 \\ 23x + 36y &= 62 \end{aligned}\right\}$ **9.** $\left.\begin{aligned} 47x - 56y &= 123 \\ 25x + 84y &= 293 \end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} 51x - 16y &= 3 \\ 68x + 23y &= 137 \end{aligned}\right\}$ **11.** $\left.\begin{aligned} 52x - 9y &= 34 \\ 39x + 14y &= 67 \end{aligned}\right\}$ **12.** $\left.\begin{aligned} 12x + 85y &= -49 \\ 19x - 34y &= 91 \end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} 65x - 14y &= 9 \\ 91x - 15y &= 31 \end{aligned}\right\}$ **14.** $\left.\begin{aligned} 15x + 46y &= 17 \\ 13x + 69y &= 73 \end{aligned}\right\}$ **15.** $\left.\begin{aligned} 14x + 81y &= 53 \\ 17x + 135y &= 101 \end{aligned}\right\}$

16. $\left.\begin{aligned} 5x + 11y &= 146 \\ 11x + 5y &= 110 \end{aligned}\right\}$ **17.** $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a^2x + b^2y &= c^2 \end{aligned}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1881.]

18. $\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} &= 2 \\ \frac{x}{14} + \frac{y}{18} &= 1 \end{aligned}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

19. $\left.\begin{aligned} \frac{4x+5y}{40} &= x - y \\ \frac{2x-y}{3} + 2y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

20. $\begin{aligned} \frac{4x-3y-7}{5} &= \frac{3x}{10} - \frac{2y}{15} - \frac{5}{6} \\ \frac{y-1}{3} + \frac{x}{2} - \frac{3y}{20} &= \frac{y-x}{15} + \frac{x}{6} + \frac{11}{10} \end{aligned}$

21. $$\left.\begin{aligned} &\frac{5x-3y}{12}+\frac{7x-5y}{15}=1-\frac{25x+3y}{60} \\ &\frac{(3\frac{1}{2})x+2y-5}{16}+\frac{11x-(4\frac{1}{3})y+17}{11}=\frac{19}{22}+\frac{17x-10y+2}{3} \end{aligned}\right\}$$

22. $$\left.\begin{aligned} &\frac{3x-5y}{3}-\frac{2x-8y-33}{12}=\frac{y}{2}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4} \\ &3\frac{1}{2}\left(\frac{x}{7}+\frac{y}{4}+1\frac{1}{3}\right)=3\frac{1}{3}\left(4x-\frac{y}{8}-24\right) \end{aligned}\right\}$$

23. $$\left.\begin{aligned} &2{\cdot}4x+{\cdot}32y-\frac{{\cdot}18x-{\cdot}025}{{\cdot}25}={\cdot}8x+\frac{5{\cdot}2+{\cdot}01y}{{\cdot}5} \\ &\frac{{\cdot}2y+{\cdot}5}{1{\cdot}5}=\frac{{\cdot}49x-{\cdot}7}{4{\cdot}2} \end{aligned}\right\}$$

24. $$\left.\begin{aligned} &\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2 \\ &\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20} \end{aligned}\right\}$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1879.]

25. $$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ &\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

26. $$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m \\ &\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=n \end{aligned}\right\}$$

27. $$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{3x}+\frac{1}{5y}=1 \\ &\frac{1}{5x}+\frac{1}{3y}=1\frac{2}{15} \end{aligned}\right\}$$

28. $$\left.\begin{aligned} &\frac{3}{y}-\frac{1}{x}=1 \\ &\frac{2}{5x}+\frac{5}{2y}=7 \end{aligned}\right\}$$

29. $$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{4}+\frac{2}{y}=2 \\ &\frac{2x}{5}+\frac{3}{2y}=2\frac{7}{20} \end{aligned}\right\}$$

30. $$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{5x}+\frac{y}{9}=5 \\ &\frac{1}{3x}+\frac{y}{2}=14 \end{aligned}\right\}$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1370.]

II. সরল সহ-সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(সহজ)

120. উদা. 1. A এবং B উভয়ের নিকটেই কতগুলি করিয়া আম ছিল ; A, B কে বলিল, "তোমার আম হইতে আমাকে 30টি দিলে আমার আমের সংখ্যা তোমার সংখ্যার দ্বিগুণ হইবে।" B উত্তর করিল, "তুমি যদি আমাকে 10টি দাও, তবে আমার আমের সংখ্যা তোমার আমের সংখ্যার তিনগুণ হইবে।" প্রত্যেকের কতগুলি করিয়া আম ছিল ?

ধর, A এর আমের সংখ্যা x এবং B এর আমের সংখ্যা y.

তাহা হইলে, A এর উক্তি অনুসারে,

$$x+30=2(y-30) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং B এর উক্তি অনুসারে,

$$y+10=3(x-10) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) হইতে, $3x-y=40$,

অথবা, $6x-2y=80 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1) হইতে, $x-2y=-90 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $5x=170$; $\therefore\ x=34$.

(4) তে x এর এই মান বসাইলে,

$$2y=34+90=124\ ; \quad \therefore\ y=62.$$

অতএব, A এর 34টি এবং B এর 62টি আম ছিল।

উদা. 2. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 7 যোগ করিলে উহা 2 তে পরিণত হয় এবং হর হইতে 2 বাদ দিলে উহা 1এ পরিণত হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

ধর, নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \dfrac{x}{y}$.

তাহা হইলে, $\dfrac{x+7}{y}=2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

এবং $\dfrac{x}{y-2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

এখন, (1) হইতে, $x+7=2y$; $\therefore\ x=2y-7$

এবং (2) হইতে, $x=y-2$

$\therefore\ 2y-7=y-2$; $\therefore\ y=5$ এবং $x=5-2=3$.

অতএব, নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{3}{5}$.

উদা. 3. চারিজন পুরুষ এবং চারিজন বালক যে কাজ তিনদিনে সম্পন্ন করিতে পারে, দুইজন পুরুষ এবং সাতজন বালকের তাহা করিতে চারিদিন লাগে। একজন পুরুষ বা একজন বালক ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারে ?

ধর, একজন পুরুষ x দিনে এবং একজন বালক y দিনে ঐ কাজ সম্পন্ন করিতে পারে। তাহা হইলে, একজন পুরুষ একদিনে সম্পূর্ণ কাজের $\dfrac{1}{x}$ অংশ এবং একজন বালক একদিনে $\dfrac{1}{y}$ অংশ করিতে পারে।

অতএব, দ্বিতীয় সর্ত্ত অনুসারে, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{y}=\dfrac{1}{4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

এবং প্রথম সর্ত্ত অনুসারে, $\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{3} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

$$\frac{10}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}; \quad \therefore \quad y=60.$$

অতএব, (2) হইতে, $\frac{4}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}; \quad \therefore \quad x=15.$

সুতরাং একজন পুরুষ সম্পূর্ণ কাজটি 15 দিনে এবং একজন বালক 60 দিনে শেষ করিতে পারে।

উদা. 4. 192 গ্যালন জলপূর্ণ একটি চৌবাচ্চার তলদেশে, জল নিষ্কাশন করিবার জন্য দুইটি নল বসান হইল। দুইটি নল একই সময় খুলিয়া দিয়া তিন ঘণ্টা পরে একটিকে বন্ধ করিয়া দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি আরও 11 ঘণ্টা পরে শূন্য হইল; কিন্তু, ঐ নলটিকে যদি 6 ঘণ্টা পরে বন্ধ করা হইত, তবে আর 6 ঘণ্টা পরে চৌবাচ্চাটি শূন্য হইত। বরাবর সমান বেগে জল পড়িয়া থাকিলে, প্রত্যেকটি নল হইতে কত গ্যালন করিয়া জল পড়িয়াছিল ?

ধর, নল দুইটি ঘণ্টায় যথাক্রমে x ও y গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

এখন প্রথম ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 3 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয় নলটি 3 + 11 অর্থাৎ 14 ঘণ্টা খোলা ছিল। অতএব, $3x+14y=192$ ... ... (1)

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 6 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয়টি 12 ঘণ্টা খোলা ছিল।

অতএব, $6x+12y=192.$ ... ... (2)

(1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

$$16y=2\times192-192=192; \quad \therefore \quad y=12,$$

অতএব, (2) হইতে, $6x=192-144=48; \quad \therefore \quad x=8.$

সুতরাং, নল দুইটি ঘণ্টায় যথাক্রমে 8 গ্যালন এবং 12 গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

উদা. 5. আয়তক্ষেত্রাকৃতি একটি প্রাঙ্গণ এরূপ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট যে, উহার দৈর্ঘ্য 3 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 গজ কমাইলে, ক্ষেত্রফল 18 বর্গগজ কমিয়া যাইত; এবং দৈর্ঘ্য 3 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 গজ বাড়াইলে, ক্ষেত্রফল 60 বর্গগজ বাড়িয়া যাইত। প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

ধর, প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য x গজ এবং প্রস্থ y গজ।

তাহা হইলে, প্রথম সর্ত অনুসারে,

$$(x+3)(y-3)=xy-18; \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

এবং দ্বিতীয় সর্ত অনুসারে, $(x+3)(y+3)=xy+60;$ ... ... (2)

(1) হইতে, $3y-3x=-9$,

অথবা, $y-x=-3$, ... (3)

(2) হইতে, $3y+3x=51$,

অথবা, $y+x=17$ ... ... (4)

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $2y=14$; $\therefore$ $y=7$.

অতএব, (4) হইতে, $x=17-7=10$.

সুতরাং, প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য 10 গজ এবং প্রস্থ 7 গজ।

উদা. 6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল দশকস্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ হইবে ; কিন্তু সংখ্যাটি হইতে 18 বাদ দিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যাইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

ধর, x দশকস্থানীয় এবং y এককস্থানীয় অঙ্ক।

তাহা হইলে, প্রশ্নের সর্ত্ত অনুসারে,

$x+y+7=3x$ ... ... (1)

এবং $(10x+y)-18=10y+x$ ... ... (2)

(1) হইতে, $2x-y=7$; ... ... (3)

এবং (2) হইতে, $9x-9y=18$, অথবা, $x-y=2$ ... (4)

(3) হইতে (4) বাদ দিলে, $x=5$; সুতরাং (4) হইতে, $y=5-2=3$.

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 53.

উদা. 7. A এবং B এই সর্ত্তে ঘুঁটি খেলিতে আরম্ভ করিল যে, A খেলায় যতবার জিতিবে প্রতিবারে B এর নিকট হইতে 2 শিলিং করিয়া পাইবে এবং যতবার হারিবে প্রতিবারে B কে 3 শিলিং করিয়া দিবে। কয়েকবার খেলার পর দেখা গেল যে, A 3 শিলিং জিতিয়াছে, কিন্তু A প্রতিবারে হারিবার জন্য যদি B কে 5 শিলিং করিয়া দিত এবং মোট ঐ সংখ্যক বার খেলার মধ্যেই আরও একবার বেশী হারিত, তাহা হইলে তাহার মোট 30 শিলিং লোকসান হইত। প্রত্যেকে কয়টি করিয়া বাজী জিতিয়াছিল ?

ধর, $x=A$ যতবার বাজী জিতিয়াছে,

$y=B$,, ,, ,, ।

তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, মোট $x+y$ সংখ্যক বার খেলা হইয়াছিল।

এখন, যেহেতু A প্রতিবারে জিতিবার জন্য B এর নিকট হইতে 2 শিলিং করিয়া পায় এবং প্রতিবারে হারিবার জন্য (অর্থাৎ, B এর প্রতিবারে জয়ের জন্য) B কে 3 শিলিং করিয়া দেয়, তাহার মোট লাভ অবশ্যই $(2x-3y)$ শিলিং।

অতএব, $2x-3y=3$ ... ... (1)

অপর সর্ত্তানুসারে, A এর $2(x-1)$ শি. লাভ এবং $5(y+1)$ শি. লোকসান হইত ; সুতরাং তাহার মোট লোকসান $[5(y+1)-2(x-1)]$ শি. হইত।

অতএব, $5(y+1)-2(x-1)=30$;

অথবা, $5y-2x=23.$ (2)

(1) এবং (2) যোগ করিয়া, $2y=26$; $y=13.$

অতএব, (1) হইতে, $x=\frac{3+39}{2}=21.$

অতএব, A, 21টি বাজী এবং B, 13টি বাজী জিতিয়াছিল।

প্রশ্নমালা 66

1. কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ এবং হরের সহিত 7 যোগ করিলে উহার মান $\frac{2}{3}$ হয়, কিন্তু হরকে দ্বিগুণ এবং লবের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান $\frac{3}{5}$ হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

2. দুইটি সংখ্যার প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির পাঁচগুণেব সহিত যোগ করিলে যোগফল 52 হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির আটগুণের সহিত যোগ করিলে যোগফল 65 হয় ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি সংখ্যার বৃহত্তরটির পাঁচগুণ, ক্ষুদ্রতরটির চারিগুণ হইতে 22 বেশী, এবং বৃহত্তরটির তিনগুণ ও ক্ষুদ্রতরটির সাতগুণের যোগফল 32 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

4. দুইটি সংখ্যার অন্তরফল 45 এবং ভাগফল 4 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

5. এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন বৃহত্তরটির $\frac{1}{4}$ অংশের ও ক্ষুদ্রতরটির $\frac{1}{3}$ অংশের যোগফল 11 হয়, এবং বৃহত্তরটির $\frac{1}{3}$ অংশ ও ক্ষুদ্রতরটির $\frac{1}{5}$ অংশ সমান হয়।

6. কোন একটি ভগ্নাংশের হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে, উহা $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয়, কিন্তু লবের সহিত 7 যোগ করিলে উহা 1 এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

7. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান 1 হয়, কিন্তু হরের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1862.]

8. কোন একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয় এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{3}$ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি কত ?

9. A এবং B এর একত্র 39 টাকা আছে, কিন্তু A যদি তাহার টাকার $\frac{2}{3}$ অংশ এবং B তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ হারাইত, তবে তাহাদের কেবলমাত্র 11 টাকা থাকিত। প্রত্যেকের কত টাকা আছে ?

10. দুইটি সংখ্যা এরূপভাবে আছে যে, ছোটটির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল বড়টির দ্বিগুণ হইবে, এবং বড়টির সহিত 4 যোগ করিলে যোগফল ছোটটির তিনগুণ হইবে ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

11. দুই ব্যক্তি, 27 মাইল দূর হইতে, একই সময় যাত্রা করিয়া একই দিকে চলিলে, 9 ঘণ্টায় মিলিত হইতে পারে, কিন্তু বিপরীত দিকে চলিলে 3 ঘণ্টায় মিলিতে পারে। তাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

12. একজন পোদ্দার (banker) কে £10 পরিমিত অর্থ, সব্‌রিণ এবং অর্দ্ধ-ক্রাউন এই দুই জাতীয় মুদ্রাতে এরূপভাবে দিতে বলা হইল, যেন অর্দ্ধ-ক্রাউনের সংখ্যা সব্‌রিণের সংখ্যার ঠিক দ্বিগুণ হয়। সে কি প্রকারে ঐরূপ দিবে ?

13. একজন লোক এবং একটি বালক, কোন কাজ 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, কিন্তু সেই কাজই সাতজন লোক এবং নয়টি বালক 2 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। একজন লোক কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে ?

14. একটি আয়তক্ষেত্র, দৈর্ঘ্যে 6 গজ বড় ও প্রস্থে 4 গজ ছোট অপর একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এবং ইহা দৈর্ঘ্যে 8 গজ বড় ও প্রস্থে 5 গজ ছোট একটি তৃতীয় ক্ষেত্রফলের সমান। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

15. 15 পাউণ্ড চা এবং 17 পাউণ্ড কফির মূল্য একত্রে 3 পা. 5 শি. 6 পে. এবং 25 পাউণ্ড চা ও 13 পাউণ্ড কফির মূল্য একত্রে 4 পা. 6 শি. 2 পে. হইলে, প্রত্যেকটির প্রতি পাউণ্ডের মূল্য নির্ণয় কর।

16. A এর 30 মাইল হাঁটিতে B এর চেয়ে 3 ঘণ্টা বেশী সময় লাগিল ; কিন্তু পদক্ষেপ দ্বিগুণ করিয়া, তাহার B হইতে 2 ঘণ্টা সময় কম লাগিল ; তাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

17. চার্লস্, উইলিয়ম্‌কে বলিল, "তোমার মারবেল হ'তে 10টি আমাকে দিলে, আমার মারবেলের সংখ্যা তোমার দ্বিগুণ হবে" ; কিন্তু উইলিয়ম্ চার্লস্‌কে বলিল, "তুমি আমাকে 10টি দিলে, আমার সংখ্যা তোমার তিনগুণ হবে"। প্রত্যেকের কয়টি করিয়া মারবেল ছিল ?

18. A, B এবং C এর মধ্যে 1100 টাকা এরূপভাবে ভাগ করা হইয়াছিল যে, A এর, B কে 200 টাকা দেওয়ার পর, B, A এর দ্বিগুণ এবং C এর তিনগুণ পাইল। পূর্ব্বে, A, B এবং C এর প্রত্যেকে কত টাকা করিয়া পাইয়াছিল ?

19. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যাকে উহার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 6 হয় এবং 3 অবশিষ্ট থাকে। অঙ্ক দুইটিকে বিপরীতভাবে স্থাপন করিয়া, উৎপন্ন সংখ্যাটিকে, অঙ্ক দুইটির সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 4 হয় এবং 9 অবশিষ্ট থাকে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

20. দুই অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে, উহার অন্তর্গত অঙ্ক দুইটিকে উল্টাইয়া লিখিলে যাহা হয়, তাহার সহিত যোগ করিলে, যোগফল 121 হয় এবং ছোট সংখ্যাটি বড় সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল 9 হয়।

21. ক্রাউন এবং অর্দ্ধ-গিনি দ্বারা 25 গিনির একটি বিল (bill) পরিশোধ করা হইল এবং অর্দ্ধ-গিনির সংখ্যার দ্বিগুণ ক্রাউনের সংখ্যার তিনগুণের চেয়ে 17 বেশী ; প্রত্যেকটির সংখ্যা নির্ণয় কর।

22. এক ব্যক্তি, কোন একটি ক্রেতার নিকট 9টি ঘোড়া এবং 7টি গরু £300 মূল্যে বিক্রয় করিল ; সে অন্য এক ব্যক্তির নিকট একই হারে এবং উক্ত মূল্যে 6টি ঘোড়া ও 13টি গরু বিক্রয় করিল। ঘোড়া ও গরু প্রত্যেকটির মূল্য কত ?

23. A এবং B যথাক্রমে 15 দিন ও 14 দিন কাজ করিয়া তাহাদের বেতন বাবদ £5. 17*s.* পাইল ; এবং B এর তিনদিনের বেতন অপেক্ষা A এর চারিদিনের বেতন 11*s.* বেশী, তাহাদের প্রত্যেকের দৈনিক বেতন কত ?

24. A এবং B একটি কাজ 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; একত্রে 4 দিন কাজ করিয়া A অবসর গ্রহণ করিলে, B কাজটি 36 দিনে শেষ করিল। প্রত্যেকে পৃথক্‌ভাবে কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে ?

25. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 2 এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{5}{8}$ এ পরিণত হয়, এবং লব ও হর প্রত্যেকটি হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

26. এক ব্যক্তি খানিকটা পথ ভ্রমণ করিল ; ঘণ্টায় অর্দ্ধমাইল দ্রুততর চলিলে সে পূর্ব্ব সময়ের $\frac{4}{5}$ অংশ সময়ে ভ্রমণ শেষ করিতে পারিত ; কিন্তু ঘণ্টায় অর্দ্ধমাইল ধীরতর পদে চলিলে সে রাস্তায় আরও $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বেশী সময় কাটাইত। ঐ ব্যক্তি কতটা পথ ভ্রমণ করিয়াছিল ?

27. 10 এবং 100 এর মধ্যবর্ত্তী কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির যোগফলের আটগুণ এবং উহা হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল, সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়কে উল্টাইয়া লিখিয়া উৎপন্ন সংখ্যা হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

28. A এবং B 20 শিলিং বাজী ধরিল। A হারিয়া গেলে, তাহার B এর তখনকার তহবিলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 25 শিলিং কম থাকিবে ; কিন্তু B হারিয়া গেলে, তাহার A এর তখনকার তহবিলের $\frac{5}{17}$ অংশ থাকিবে ; তাহাদের প্রত্যেকের তহবিলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

29. এক ব্যক্তি কয়েকটি ভেড়া কিনিবার ইচ্ছা করিয়া দেখিল যে, এক একটি ভেড়ার দাম £2. 2*s.* হইলে তাহার £2 8*s.* কম পড়িবে কিন্তু এক একটির দাম £2 হইলে প্রয়োজন অপেক্ষা তাহার £2 বেশী থাকিবে। ভেড়ার সংখ্যা এবং ঐ ব্যক্তির অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

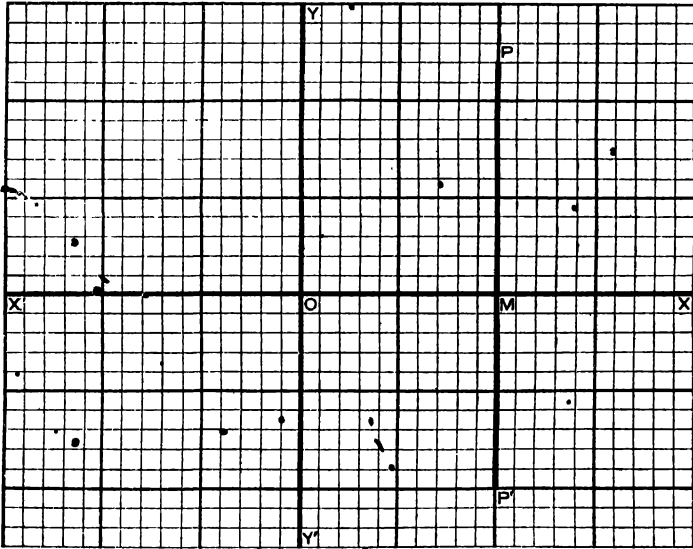
30. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্ক দুইটির যোগফলের তিনগুণ এবং সংখ্যাটিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল উক্ত অঙ্ক দুইটির যোগফলের বর্গ হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

ঊনবিংশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রাবলী

(Graphs of Simple Equations)

121. সংখ্যাসমূহ জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা কি প্রকারে সূচিত করা হয়, তাহা সপ্তম অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে, সরল সমীকরণগুলিকে কিরূপে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে, তাহাই বিবেচ্য বিষয়। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা এই বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।

উদা. 1. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে স্থান পরিবর্ত্তন করে যে, সকল অবস্থানেই উহার ভুজ (abscissa) 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথ (locus) কি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

OX (অর্থাৎ x-অক্ষরেখা) এর উপর একটি বিন্দু M এরূপে লও, যেন $OM=5$ একক দীর্ঘ। M বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তর করিয়া PMP' রেখাটি টান।

এখন, স্পষ্টই দেখা যায় যে, PMP' রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ 5 একক দীর্ঘ হইবে; এবং এতদ্ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুরই ভুজ 5 একক দীর্ঘ হইবে না।

কাজেই, সচল বিন্দুটি সকল সময়েই PMP' রেখার উপরে থাকিবে।

অতএব দেখা যায় যে, একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ সকল সময়েই 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে উহার সঞ্চার-পথ PMP' রেখাটি দ্বারা সূচিত হয়। ইহাকেই সংক্ষেপে বলা হয় যে, **PMP' সরলরেখা $x=5$ এই সমীকরণটির লেখ** বা **লৈখিক চিত্র** (graph).

টীকা 1. ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, $y=5$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র, XOX' এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

2. সাধারণভাবে বলা যাইতে পারে যে, $x=a$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র (graph) y-অক্ষরেখার (y-axis এর) সমান্তরাল একটি রেখা, এবং এই রেখাটি x-অক্ষরেখার উপরিস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু (origin) হইতে a-একক দূরে অবস্থিত; তদ্রূপ, $y=b$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখার (x-axis এর) সমান্তরাল একটি রেখা, এবং উহা y-অক্ষরেখাস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু হইতে b-একক দূরে অবস্থিত।

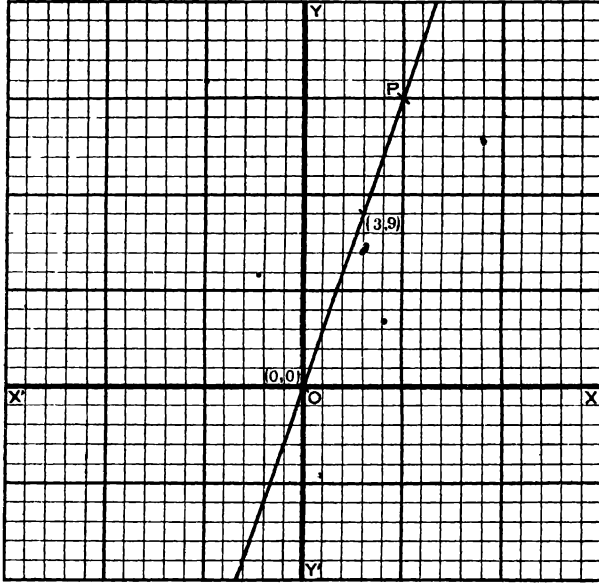
3. স্পষ্টতঃই, $x=0$ এর লৈখিক চিত্র y-অক্ষরেখা; এবং $y=0$ এর লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখা।

উদা. 2. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ (অর্থাৎ x) এবং কোটি (অর্থাৎ y) সর্বদা $y=3x$ সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ; তাহা হইলে ঐ বিন্দুটির সঞ্চার-পথ কি, তাহা নির্ণয় কর।

যেহেতু, $\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ হইলে,} \\ y=0. \end{array}\right\}$ এবং $\left.\begin{array}{l} x=3 \text{ হইলে,} \\ y=9. \end{array}\right\}$

অতএব, সচল বিন্দুর দুইটি অবস্থান (0, 0) এবং (3, 9) দ্বারা সূচিত হইতেছে।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া (0, 0) এবং (3, 9) বিন্দু দুইটি সংস্থাপন কর। এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় সঞ্চার-পথ হইবে।

ধর, এই অসীম সরলরেখাটির উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, P এর ভুজ-কোটি (co-ordinates) যথাক্রমে 5 এবং 15; এবং

এই সংখ্যা দুইটি দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে দেখা যাইতে পারে যে, উক্ত রেখার উপরিস্থিত অন্যান্য সকল বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

কাজেই, সচল বিন্দুটি সকল সময়েই OP সরলরেখার উপর থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইবে না।

অতএব, ইহা প্রতিপন্ন হইল যে, কোন সচল বিন্দুর ভুজ-কোটি (অর্থাৎ x এবং y) সকল সময়েই যদি $y=3x$ সমীকরণ দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথ OP রেখা দ্বারা সূচিত হইবে। অর্থাৎ, **OP সরলরেখাই $y=3x$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।**

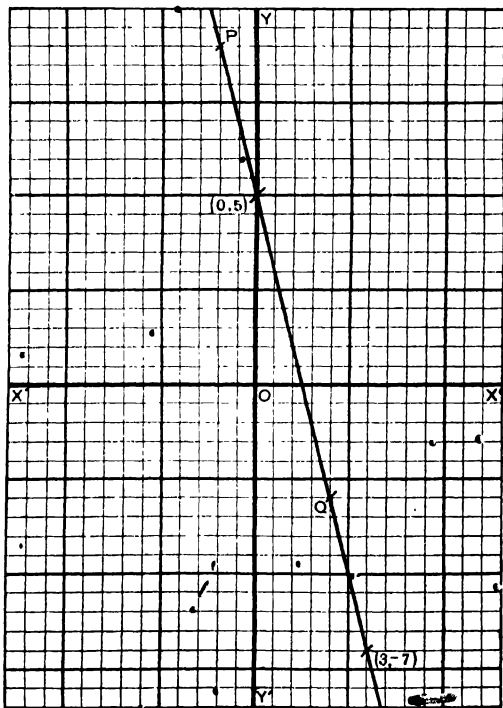
টীকা। সাধারণভাবে বলিলে, m যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $y=mx$ এর লৈখিক চিত্র, মূলবিন্দুগামী এক সরলরেখা হইবে।

উদা. 3. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ-কোটি (অর্থাৎ x এবং y) সর্ব্বদা $y=-4x+5$ সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথ কি, তাহা নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ হইলে,} \\ y=5. \end{array}\right\} \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{array}{l} x=3 \text{ হইলে,} \\ y=-7. \end{array}\right\}$$

অতএব, সচল বিন্দুটির দুই অবস্থান (0, 5) এবং (3, −7) দ্বারা সূচিত হইতেছে।

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণকে একক ধরিয়া (0, 5) এবং (3, −7) বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর। উহাদের সংযোজক অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় সঞ্চার-পথ।

ধর, এই অসীম রেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে দেখা যায়

যে, P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে -1 ও 9; এবং এই সংখ্যা দুইটি দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। রেখার উপর আর একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি '2 এবং -3'ও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। তদ্রূপ, দেখা যাইবে যে, রেখার উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কিন্তু রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না। কাজেই, সচল বিন্দুটি সর্ব্বদা PQ রেখার উপরে থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইবে না।

সুতরাং, কোন সচল বিন্দুর ভুজ-কোটি যদি $y=-4x+5$ দ্বারা সম্বদ্ধ হয়, তাহা হইলে উহার সঞ্চার-পথ, PQ, এই অসীম সরলরেখা দ্বারা সূচিত হইবে। অর্থাৎ, **PQ সরলরেখাটিই $y=-4x+5$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।**

1. সাধারণভাবে বলিলে, m ও c যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $y=mx+c$ এর লৈখিক চিত্র, $(0, c)$ বিন্দুগামী এক সরলরেখা হইবে।

টীকা 2. যেহেতু, দুই অক্ষর (ধর, x ও y)-বিশিষ্ট প্রত্যেক সরল সমীকরণকেই $y=mx+c$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়, অতএব, **সকল সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রই সরলরেখা হইবে।**

টীকা 3. কোন নির্দ্দিষ্ট সমীকরণের লৈখিক চিত্রকে সচল বিন্দুর সঞ্চার-পথ বলিয়া অভিহিত করা যায়, যদি উক্ত সচল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের ভুজ-কোটির মানদ্বয় নির্দ্দিষ্ট সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

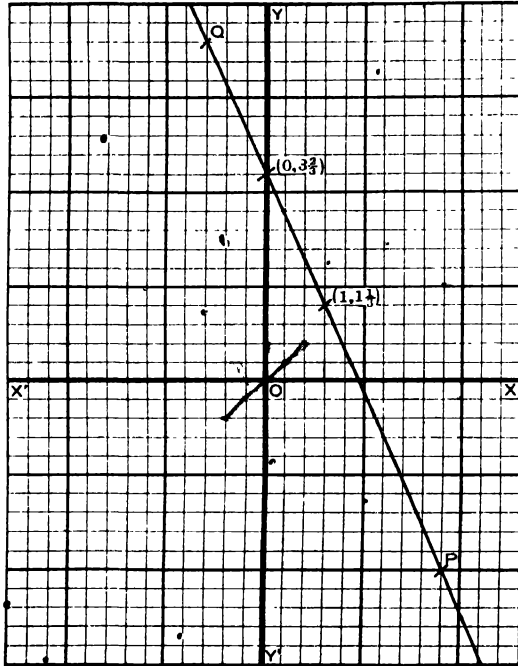
উদা. 4. $7x+3y=11$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর।

এক্ষেত্রে, $x=0$ হইলে, $y=3\frac{2}{3}$. এবং $x=1$ হইলে, $y=1\frac{1}{3}$.

অতএব, স্পষ্টই $(0, 3\frac{2}{3})$ এবং $(1, 1\frac{1}{3})$ বিন্দুদ্বয় নির্ণেয় চিত্রের উপর অবস্থিত।

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিনগুণকে একক ধরিয়া $(0, 3\frac{2}{3})$ ও $(1, 1\frac{1}{3})$ বিন্দু দুইটি সংস্থাপন কর; উহাদের সংযোজক অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় লেখ হইবে।

এই অসীম সরলরেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু, P, লইয়া দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি (অর্থাৎ 3 এবং $-3\frac{1}{3}$) প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ঐ রেখার

উপর অন্য একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি, -1 এবং 6, সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই অসীম সরলরেখা

PQ এর উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে; কিন্তু উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। অতএব, PQ দ্বারা সূচিত অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

টীকা 1. $7x+3y=11$ এর লৈখিক চিত্রকে, $\frac{11-7x}{3}$ এই **বীজগণিতীয় রাশির লৈখিক চিত্র**ও বলা হয়।

টীকা 2. PQ সরলরেখাটি $7x+3y=11$ সমীকরণের লৈখিক চিত্র হওয়ায়, উক্ত সমীকরণটিকে 'PQ সরলরেখার সমীকরণ' (equation to the str. line PQ) বলে।

টীকা 3. কোন নির্দ্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে, এরূপ

একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়, যাহা উক্ত রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটির মান দ্বারাই সিদ্ধ হয়।

উদা. 5. $(1, 1)$ এবং $(3, -\frac{1}{2})$ বিন্দু দুইটি দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, $y = mx + c$ নির্ণেয় সমীকরণ।

যেহেতু, $(1, 1)$ এবং $(3, -\frac{1}{2})$ এর প্রত্যেক মানযুগল দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে, অতএব,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m + c \\ \text{এবং} \quad -\tfrac{1}{2} &= 3m + c \end{aligned}\right\} \quad \text{সুতরাং,} \quad 2m = -\tfrac{3}{2}; \quad \text{কাজেই,} \quad m = -\tfrac{3}{4}; \quad \text{এবং} \quad c = 1 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{4}.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$,

অথবা, $3x + 4y = 7.$

প্রশ্নমালা 67

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $x = 8.$ (2) $x = 13.$ (3) $x + 11 = 0.$
(4) $y = -7.$ (5) $y - 9 = 0.$ (6) $y + 10 = 0.$

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $y = x.$ (2) $y = -x.$ (3) $y = 2x.$
(4) $y + 2x = 0.$ (5) $y = -3x.$ (6) $3y = 5x.$
(7) $7y + 8x = 0.$ (8) $6y + 13x = 0.$

3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $y = 3x + 4.$ (2) $y = 7x - 8.$ (3) $y = -5x + 9.$
(4) $y = -8x - 11.$ (5) $3y = 7x + 4.$ (6) $-6y = 7x - 1$

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $2x + 7y = 10.$ (2) $4x - 5y - 7 = 0.$
(3) $5x + 6y + 8 = 0.$ (4) $-3x + 7y + 8 = 0.$
(5) $10y - 9x = 13.$ (6) $8x - 11y + 13 = 0$

5. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$ (2) $\frac{x}{7}+\frac{y}{-9}=1.$ (3) $\frac{x}{-8}+\frac{y}{13}=1.$

(4) $y=\frac{5-7x}{6}.$ (5) $y=\frac{9x-13}{4}.$ (6) $\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}=1.$

6. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

(1) $x-3.$ (2) $3x+4.$ (3) $-7x+8.$

(4) $\frac{7-4x}{3}.$ (5) $\frac{5x-9}{4}.$ (6) $\frac{8x+11}{5}.$

7. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(1) $(0, 0), (5, 6).$ (2) $(0, 5), (7, 0).$

(3) $(6, -8), (-7, 5).$ (4) $(-4, 8), (-9, -13).$

(5) $(-11, 0), (7, -10).$

বিংশ অধ্যায়

সহজ দ্বি-শক্তি সমীকরণ ও তদ্বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Easy Quadratic Equations and Problems)

122. সংজ্ঞা : যে সমীকরণে অজ্ঞাতরাশির **বর্গ** বা **দ্বিতীয় শক্তিবিশিষ্ট** পদ থাকে, এবং তদূর্দ্ধ শক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না, তাহাকে **দ্বি-শক্তি সমীকরণ** (quadratic equation) বা **দ্বিতীয়মানের সমীকরণ** (equation of the second degree) বলে।

যদি কোন দ্বি-শক্তি সমীকরণে, অজ্ঞাতরাশির কেবলমাত্র বর্গবিশিষ্ট পদটিই বর্ত্তমান থাকে (অজ্ঞাতরাশির প্রথম শক্তিবিশিষ্ট পদটি না থাকে), তাহাকে **বিশুদ্ধ** বা **অমিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণ** (pure quadratic), এবং যাহাতে প্রথম শক্তিবিশিষ্ট পদটিও বর্ত্তমান থাকে, তাহাকে **মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণ** (adfected quadratic) বলে। যথা,

$3x^2=75$ একটি বিশুদ্ধ দ্বি-শক্তি সমীকরণ ;

এবং $3x^2-7x=6$ একটি মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণ।

123. বিশুদ্ধ দ্বি-শক্তি সমীকরণের সমাধান : বিশুদ্ধ দ্বি-শক্তি সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে, সরল সমীকরণ সমাধানের প্রণালী অনুসারে, অজ্ঞাতরাশির বর্গের মান (value of the unknown quantity) নির্ণয় করিয়া, এই নির্ণীত মানের বর্গমূল বাহির করিতে হয়।

উদা. 1. সমাধান কর : $5(x^2+1)-2=3(x^2+7)$.

এস্থলে, $5x^2+5-2=3x^2+21$;

অথবা, $5x^2+3=3x^2+21$; [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $2x^2=18$;

$x^2=9$.

এখন, যেহেতু অজ্ঞাতরাশিটির বর্গ 9 এর সমান, সুতরাং উহা হয় $+3$ নতুবা -3 হইবে ; (এক্ষেত্রে, x এর উভয় মানই প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে ; ছাত্রগণ ইহা পরীক্ষা করিয়া দেখিতে পারে।)

টীকা। উপরোক্ত উদাহরণে লক্ষ্য করিবে যে, সর্ব্বশেষ প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিত প্রশ্ন সমাধানের সমান ; "কোন্ সংখ্যার বর্গ লইলে 9 পাওয়া যায় ?"

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{1}{3}(x-2)(x-3)-\frac{1}{21}(x-21)(x-14)=2$

উভয় পক্ষকে 21 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$7(x-2)(x-3)-(x-21)(x-14)=42$$

$$\text{বাম পক্ষ}=(7x^2-35x+42)-(x^2-35x+294)$$
$$=7x^2-35x+42-x^2+35x-294$$
$$=6x^2-252$$

অতএব, নিম্নলিখিত সমীকরণটি পাওয়া গেল ,

$$6x^2-252=42$$

অথবা, $6x^2=252+42=294$,

উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^2=49$

এখন, যেহেতু, অজ্ঞাতরাশিটি এইরূপ যে, উহার বর্গ 49 এর সমান, সুতরাং উহা হয় $+7$, নতুবা -7 হইবে।

অতএব, $x=+7$ অথবা -7

উদা. 3. 9 গজ দীর্ঘ ও 4 গজ প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ধর, বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $=x$ গজ।

তাহা হইলে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=x\times x$ বর্গগজ $=x^2$ বর্গগজ।

আবার, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=4\times 9$ বর্গগজ $=36$ বর্গগজ।

কাজেই, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, x^2 বর্গগজ $=36$ বর্গগজ।

অথবা, $x^2=36$; $\therefore$ $x=6$, অথবা -6

যেহেতু, প্রকৃত কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ধনরাশি না হইয়া পারে না, অতএব এস্থলে, -6 মানটি গ্রহণযোগ্য নহে।

সুতরাং, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=6$ গজ।

টীকা। দ্বি-শক্তি সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলীতে, সমীকরণের যে বীজটি (root) প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে গ্রহণযোগ্য নহে, সেইটিকে পরিত্যাগ করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 68

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x এর মান নির্ণয় কর :

1. $3x^2=27.$ 2. $a^2x^2=a^4.$ 3. $\frac{1}{7}x^2=28.$

4. $8x+\frac{7}{x}=\frac{65}{7}x.$ 5. $2(x^2-5)+x(3-x)=3(x+5).$

6. $(x-7)(x-10)+(x-3)(x-2)=(x-17)(x-5).$

7. $\frac{2x^2+10}{15}=7-\frac{50+x^2}{25}.$ 8. $(x+a)^2-2a(a+x)=3a^2.$

9. $x^2+2bx-b^2=a^2-b(b-2x).$ 10. $2x(3x+5)-5x(x+2)=36.$

11. $\frac{3x^2+15}{7}+\frac{2x^2+9}{3}=\frac{2x^2+87}{21}+2.$

12. কোন সংখ্যার চারিগুণ উহার অন্যোন্যকের যোগফলের সমান; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

13. কোন একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণ, 9 গজ দীর্ঘ এবং 3 গজ প্রস্থ-বিশিষ্ট একটি আয়তের ক্ষেত্রফলের চারিগুণের সমান; বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

14. A এর একখণ্ড বর্গাকৃতি জমি আছে; সে উহা B এর 91 বর্গগজ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একখানি আয়তক্ষেত্রাকৃতি বাগানের সহিত বদল করিয়া 10 বর্গগজ পরিমিত জমি লাভ করিল; বর্গাকৃতি জমির এক পার্শ্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

15. 10 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখাকে এরূপ দুই ভাগে ভাগ কর, যেন প্রথমাংশের বর্গের পাঁচগুণের এবং দ্বিতীয়াংশের বর্গের অন্তরফল প্রথমাংশের বিশগুণের সমান হয়।

124. উৎপাদক-বিশ্লেষণ সাহায্যে মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণের সমাধান : মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণকে সরলীকরণ এবং পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ এর আকারে লিখিয়া, যদি এতল্লব্ধ বামপক্ষের উৎপাদক নির্ণয় করা যায়, তাহা হইলে উৎপাদক সাহায্যে সমীকরণের বীজ নির্ণীত হইয়া থাকে। যথা,

উদা. 1. সমাধান কর : $x^2-5x+6=0.$

স্পষ্টই, বাম পক্ষ $=(x-2)(x-3).$ অতএব, $(x-2)(x-3)=0.$

$\therefore\quad x-2=0$, অর্থাৎ, $x=2$; অথবা, $x-3=0$, অর্থাৎ, $x=3.$

অতএব, 2 এবং 3 ই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 2. সমাধান কর : $2x^2-10x=3x-15.$

পক্ষান্তর করিয়া, $2x^2-10x-3x+15=0$;

স্পষ্টই, বামপক্ষ $=2x(x-5)-3(x-5)=(2x-3)(x-5).$

$$\therefore\quad (2x-3)(x-5)=0.$$

অতএব, $2x-3=0$, অর্থাৎ, $x=\frac{3}{2}$; অথবা, $x-5=0$, অর্থাৎ, $x=5.$

$\therefore\quad \frac{3}{2}$ এবং 5 ই নির্ণেয় বীজ।

টীকা। উপরোক্ত সমীকরণটিতে, অর্থাৎ $2x^2-10x=3x-15$ অথবা $2x(x-5)=3(x-5)$ তে দেখা যায় যে, $x-5$ উৎপাদকটি উভয়পক্ষেই বর্ত্তমান। কাজেই, $x-5=0$ অর্থাৎ $x=5$ ধরিলে, সমীকরণের উভয়পক্ষের মানই সমান হইবে, অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। আবার, যদি $x-5$ এর মান শূন্য (0) না হয়, তাহা হইলে উভয়পক্ষকে $x-5$ দ্বারা ভাগ করিলে, $2x=3$ অর্থাৎ $x=\frac{3}{2}$ পাওয়া যায়। কাজেই, $x=5$ অথবা $\frac{3}{2}$ হইলে, সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং, 5 অথবা $\frac{3}{2}$ই নির্ণেয় বীজ।

ইহা হইতে দেখা যায় যে, সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত সকল পদকে একই দিকে পক্ষান্তর করার বিশেষ কোন আবশ্যকতা নাই।

উদা. 3. সমাধান কর : $10(2x+3)(x-3)+(7x+3)^2=20(x+3)(x-1).$

এখন, $10(2x^2-3x-9)+(49x^2+42x+9)=20(x^2+2x-3)$;

$\therefore$ পক্ষান্তর ও সরলীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা $49x^2-28x-21=0$ পাওয়া গেল ;

$$\therefore\quad 7x^2-4x-3=0 ;$$

অথবা, $(7x^2-7x)+(3x-3)=0,$

অর্থাৎ, $(7x+3)(x-1)=0.$

অতএব, $7x+3=0$, $x=-\frac{3}{7}$; অথবা, $x-1=0$, অর্থাৎ, 1

অতএব, $-\frac{3}{7}$ এবং 1 ই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 4. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহা উহার অন্যোন্যকের 65 গুণ অপেক্ষা 64 বেশী।

ধর, নির্ণেয় সংখ্যা $=x$.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সর্ত্তানুযায়ী $x-\frac{65}{x}=64$.

এখন, উভয় পক্ষকেই x দ্বারা গুণ করিয়া, $x^2-65=64x$,

অথবা, $x^2-64x-65=0$, [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $(x-65)(x+1)=0$, [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

অথবা, $x-65=0$, অর্থাৎ, $x=65$; অথবা, $x+1=0$, অর্থাৎ, $x=-1$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা 65, অথবা, -1.

প্রশ্নমালা 69

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $3x^2-12x+1=6x-23$.
2. $4x^2-4x=80$.
3. $x+2-\frac{6}{x+2}=1$.
4. $x^2+9x-52=0$.
5. $x^2-\frac{5}{3}x-4=0$.
6. $6x^2+5x-4=0$.
7. $3(x-2)^2=18+(8x+1)$.
8. $x-\frac{x^3-8}{x^2+5}=2$.
9. $\frac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5$.
10. $x^2-(a+b)x+ab=0$.
11. এইরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল 399 এবং যোগফল 40.
12. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার বর্গ সংখ্যাটির দশগুণ হইতে 96 বেশী।
13. কোন সংখ্যা 12 হইতে যত বেশী, সংখ্যাটির অন্যোন্যকের উনচল্লিশগুণ 4 হইতে ঠিক তত কম ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
14. পিতা ও পুত্রের বর্ত্তমান বয়সের অন্তর 25. দশ বৎসর পূর্ব্বে উহাদের বয়সনির্দ্দেশক সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 150 হইলে, ব্যক্তিদ্বয়ের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।
15. 100 বর্গগজ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 15 গজ বেশী। ফুট প্রতি আট আনা দরের তারের জাল দিয়া ঐ ক্ষেত্রটি ঘেরাও করিতে কত খরচ পড়িবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

I

1. দুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.) এর সংজ্ঞা লিখ। $36x^2a^4c^5$, $24xy^2a^3b^4$ এবং $240y^3a^6b^2c$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

x^2-6x+9 এবং $4x^2-11x-3$.

3. $ab-ac-b^2+bc$ এবং $b^2-12ac-4a^2-9c^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

4. $x^3+y^3+3xy-1$ কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং দেখাও যে ইহার এবং $2(x^2+xy-x)+3y(x+y)-(7+3y)+7x+7y$ এর গ. সা. গু. $x+y-1$.

5. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc-(b^2+c^2-a^2)}=\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$.

6. সরল কর : $\dfrac{x^6}{x^2-1}-\dfrac{x^4}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

7. সমাধান কর : $ax+1=by+1=ay+bx$.

8. কোন চৌবাচ্চার সহিত দুইটি নল সংলগ্ন আছে; উহাদের একটি দ্বারা a ঘণ্টায়, এবং অপরটি দ্বারা b ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করা যাইতে পারে। দুইটি নল একত্রযোগে চৌবাচ্চাটিকে কত ঘণ্টায় পূর্ণ করিবে? যদি চৌবাচ্চার সহিত আরও একটি নল সংলগ্ন থাকিত এবং এই তৃতীয় নলটি দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাকে c ঘণ্টায় শূন্য করিতে পারা যাইত, তাহা হইলে তিনটি নলই এক সঙ্গে খুলিয়া রাখিলে, কত ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটিকে শূন্য করা যাইবে?

II

1. $7x^2-26x+15$ এবং $5x(x-1)+3(3x-11)-24$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $x^3+bx^2+ax+ab$ এবং $x^2-(a-b)x-ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে সরল কর :

(i) $\dfrac{(3x^4y^2-3x^2y^4)^2}{(2x^3y-2xy^3)^2}$; (ii) $\dfrac{3(x^2-x-30)(x^2-9x+14)}{(x^2-13x+42)(x^2+3x-10)}$.

4. $x = a^2 + b^2$ এবং $y = a^2 - b^2$ হইলে, $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. সরল কর : $\frac{(2x-9)^2 - (x-6)^2}{3(x^2 - 10x + 25)} + \frac{2(x-3)^2}{3(x^2 - 8x + 15)}$.

6. দেখাও যে,
$\frac{x^4}{3} - \frac{11}{12}x^3 + \frac{41}{8}x^2 - \frac{23}{4}x + 6$ এর একটি উৎপাদক $\frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{6} + 1$ হইবে।

7. $\frac{5}{7}(2x - 11) - \frac{3}{4}(x - 5) = \frac{x}{3} - (10 - x)$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

8. সমাধান কর : $ax + by = c^2$ এবং $\frac{a+x}{b} - \frac{b+y}{a} = 0$.

III

1. $a^2x^3 + a^5 - 2abx^3 + b^2x^3 + a^3b^2 - 2a^4b$ এবং $2a^2x^4 - 5a^4x^2 + 3a^6 - 2b^2x^4 + 5a^2b^2x^2 - 3a^4b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ এবং $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. $x^2 - 9$, $(x+3)^2$ এবং $x^2 + x - 6$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1910.]

4. দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিয়ম বর্ণনা কর, এবং যথাযথরূপে উহা প্রতিপন্ন কর।

$x^2 + (a+b)x + ab$, $x^2 - b^2$ এবং $x^2 + (a-b)x - ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. সরল কর : $\frac{1}{4}\left(\frac{x+3}{x^2+x-6} - \frac{x-5}{x^2-3x-10}\right) - \frac{1}{x^2+4}$.

6. সমাধান কর : $ax + y = x + by = \frac{1}{2}(x+y) + 1$.

7. কোন মূলধনের এক অংশ শতকরা 4 পাউণ্ড্ হিসাবে ও বাকী অংশ শতকরা 7 পাউণ্ড্ হিসাবে সুদে খাটাইলে মোট 196 পাউণ্ড্ সুদ আদায় হয়; কিন্তু সুদের হার যথাক্রমে 5 পাউণ্ড্ ও 6 পাউণ্ড্ হইলে, মোট 212 পাউণ্ড্ সুদ আদায় হইত্। মূলধনের অংশদ্বয়ের পরিমাণ নির্ণয় কর।

8. $3(x^2 - 4) = 15$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

IV

1. দুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. এর সংজ্ঞা লিখ।

A এবং B, এই দুইটি বীজগণিতীয় রাশির, H এবং L যথাক্রমে গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $H \times L = A \times B$.

2. $x^2 - y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$ এবং $x^3 - y^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; এবং দেখাও যে, উহাদের ল. সা. গু. কে $x^2 + xy + y^2$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $(x - y)(x^2 - y^2)$ হইবে।

3. $\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}$ হইতে $\dfrac{x+6}{x^2+5x-6}$ এর ন্যূনতা নির্ণয় কর।

4. সরল কর : $\dfrac{1}{m^2+m+1} + \dfrac{2m}{m^4+m^2+1}$.

5. দেখাও যে, $(x+y)^3 - (y+z)^3 = 3(x-z)\{(x+y)(y+z) + \frac{1}{3}(x-z)^2\}$.

6. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার এককস্থানে 5 আছে, এবং দশকস্থানের অঙ্কটি অন্য দুইটির সমষ্টির অর্দ্ধ। আবার, সংখ্যাটির সহিত 108 যোগ করিলে এই যোগলব্ধ সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদত্ত সংখ্যার শতকস্থানীয় অঙ্কের, এবং দশকস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদত্ত সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কের সমান হয়। প্রদত্ত সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

7. কোন একটি ভগ্নাংশের হর ও লবের সহিত 3 যোগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{2}{3}$এ পরিণত হয়; কিন্তু হর ও লব হইতে 5 বিয়োগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$এ পরিণত হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

8. সমাধান কর : $5(x^2 - 3x + 11) + 3(x^2 + 2x + 4) = 3(3x^2 - 3x + 1)$.

1. $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2$ এবং $x^4 - (a+b)^2x^2 + 2ab(a+b)x$ $^2b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $35x^2 - 11x - 6$ এবং $40x^2 - 29x + 3$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. সরল আকারে পরিবর্ত্তন কর :

$$\left\{\frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{2y}{x-y}\right\} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left\{\frac{3}{x-y} - \frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right\}.$$

4. সরল কর : $\dfrac{a^2+bc+ca+ab}{a^2+2bc+2ca+ab} \times \dfrac{a^3+8c^3}{a^4+a^2c^2+6ac^3+4c^4}$.

5. দেখাও যে, $\dfrac{x+2}{1+x+x^2} - \dfrac{x-2}{1-x+x^2} - \dfrac{2x^2-4}{1-x^2+x^4} = \dfrac{4x^4+8}{x^8+x^4+1}$.

6. A এবং B রেলগাড়ীতে 120 মাইল ভ্রমণ করিল। A দেড়গুণ ভাড়া দিয়া একখানি রিটার্ণ টিকিট ক্রয় করিল। ফিরিয়া আসিয়া তাহারা দেখিল যে, A, B অপেক্ষা প্রতি 100 মাইলে 4 আ. 2 পাই কম ভাড়াতে ভ্রমণ করিয়াছে। দেখাও যে, মাইল প্রতি ভাড়া 2 পাই।

7. $x=5$ হইলে, $ax+b$, এই রাশিটির মান 13 এবং $x=13$ হইলে, উক্ত রাশিটির মান 29 হয়। $x=\cdot 5$ হইলে, দেখাও যে, ঐ রাশিটির মান 4 হইবে।

8. একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ হইতে 4 এর ন্যূনতা 28 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

VI

1. $3x^3-18x^2+33x-18$, x^2-5x+6 এবং x^2-3x+2 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b$, $bx^2-(b^2+bc)x+b^2c$ এবং $cx^2-(c^2+ac)x+c^2a$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. a এবং b, এই দুইটি রাশির ল. সা. গু. x, এবং গ. সা. গু. y ; $x+y=ma+\dfrac{b}{m}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3=m^3a^3+\dfrac{b^3}{m^3}$.

4. সরল কর : $\dfrac{z(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} + \dfrac{x(y^3-z^3)}{y^2+yz+z^2} + \dfrac{y(z^3-x^3)}{z^2+zx+x^2}$.

5. $x=\dfrac{a}{a+b}$ এবং $y=\dfrac{b}{a+b}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; (ii) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}=\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

6. সমাধান কর :

$$\tfrac{1}{3}(7x-5)+\tfrac{1}{33}(34x+10)-\frac{(3x-2)(5x-3)}{4}=\frac{(4-x)(2+15x)}{4}-18.$$

7. কোন স্ত্রীলোক পেনি প্রতি তিনটি হিসাবে কতকগুলি আপেল, এবং পেনি প্রতি চারিটি হিসাবে ঐ সমান সংখ্যক আপেল ক্রয় করিয়া প্রতি দুই পেনিতে সাতটি হিসাবে সমস্ত আপেল বিক্রয় করায় দেখিতে পাইল যে, তাহার তিন পেন্স্ লোকসান হইয়াছে। সে কত মূল্যে আপেলগুলি বিক্রয় করিয়াছিল ?

8. সমাধান কর : $(2x+3)(x-5)+(x+5)(3x+1)=34+(x+4)(x+5)$.

VII

1. $x^3-7x^2+5x-35$, x^4+8x^2+15 এবং $x^3(x^2+8)-7(x^4+15)+15x-56x^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $ab-ac+bc-b^2$, $bc-ab+ac-c^2$ এবং $ac-bc+ab-a^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. x এবং y, এই দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু, এবং ল. সা. গু. যথাক্রমে 3 এবং 105 ; $x+y=36$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{35}$.

4. সরল কর : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-1)}$.

5. $x=\frac{a+b}{a-b}$ এবং $y=\frac{a-b}{a+b}$ হইলে, $\frac{x+y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা, উহার অন্তর্গত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির চারিগুণ হইলে, দেখাও যে, অঙ্ক দুইটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, সেইটি ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ হইবে।

7. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} 3x+20 &= 4y-10 \\ 4(x-1)-3(y-3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1895.]

8. কোন এক সংখ্যার বর্গ 7 হইতে যত বড়, ঐ সংখ্যার অর্দ্ধের বর্গ 13 হইতে তত ছোট ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

একবিংশ অধ্যায়

জটিল সূত্রাবলী (Harder Formulæ)

চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত সূত্রাবলী হইতে জটিলতর সূত্রাবলী সম্পর্কে বর্ত্তমানে আলোচনা করা যাইতেছে।

125. সূত্র $(x+a)(x+b)(x+c)$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

টীকা। শিক্ষার্থিগণ অতি সহজেই ইহার সত্যতা প্রত্যক্ষ করিতে পারে। বলা বাহুল্য যে, নিম্নলিখিত সূত্রাবলীও এই সূত্রটিরই অন্তর্ভুক্ত।

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc\ ;$$
$$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3+(a+b-c)x^2-(bc+ca-ab)x-abc\ ;$$
$$(x+a)(x-b)(x-c) = x^3+(a-b-c)x^2+(bc-ca-ab)x+abc.$$

দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)(x-c) &= \{x+(-a)\}\{x+(-b)\}\{x+(-c)\}\\ &= x^3+\{(-a)+(-b)+(-c)\}x^2+\{(-b)(-c)\\ &\qquad +(-c)(-a)+(-a)(-b)\}x+(-a)(-b)(-c)\\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.\end{aligned}$$

এইরূপে অন্য দুইটি সূত্রের সত্যতাও প্রতিপন্ন করা যায় ; ছাত্রদের উপর উহাদের প্রমাণের ভার অর্পিত হইল।

উদা. 1. $x+2$, $x+4$ এবং $x+6$ এর গুণফল লিখ।

$$2+4+6=12,$$
$$4\times6+6\times2+2\times4=24+12+8=44,$$
$$2\times4\times6=48.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $= x^3+12x^2+44x+48.$

উদা. 2. $x-3$, $x-5$ এবং $x-7$ এর গুণফল লিখ।

$$(-3)+(-5)+(-7) = -15,$$
$$(-5)(-7)+(-7)(-3)+(-3)(-5) = 35+21+15 = 71,$$
$$(-3)(-5)(-7) = -105.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $= x^3-15x^2+71x-105.$

উদা. 3. $x-4$, $x+5$ এবং $x-3$ এর গুণফল লিখ।

$$(-4)+5+(-3)=-2,$$
$$(5)(-3)+(-3)(-4)+(-4)(5)=-15+12-20=-23,$$
$$(-4)\times 5\times(-3)=60.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3-2x^2-23x+60.$

উদা. 4. $x+3$, $x+5$ এবং $x-8$ এর গুণফল লিখ।

$$3+5+(-8)=0,$$
$$(5)(-8)+(-8)(3)+(3)(5)=-40-24+15=-49,$$
$$3\times 5\times(-8)=-120.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3-0.x^2-49x-120$
$=x^3-49x-120.$

প্রশ্নমালা 70

গুণফল লিখ :

1. $x+1, x+2$ এবং $x+3$.

2. $x+2, x+5$ এবং $x+7$.

3. $x+3, x-6$ এবং $x+2$.

4. $x+4, x+5$ এবং $x-10$.

5. $x-8, x+3$ এবং $x+1$.

6. $x-5, x-2$ এবং $x+8$.

7. $x-3, x+7$ এবং $x-4$.

8. $x+6, x-5$ এবং $x-7$.

9. $x+5, x-7$ এবং $x-11$.

10. $x-3, x-6$ এবং $x-9$.

11. $x+4, x-5$ এবং $x-12$.

12. $x+5, x+9$ এবং $x+11$.

13. $x-6, x+8$ এবং $x-2$.

14. $x-3, x-7$ এবং $x-13$.

15. $x-3, x+12$ এবং $x+4$.

16. $x-9, x-10$ এবং $x+12$.

17. $x+9, x-5$ এবং $x-7$.

18. $x+8, x+12$ এবং $x+15$.

19. $x-14, x+8$ এবং $x+6$.

20. $x-5, x-10$ এবং $x-16$.

126. বহুপদরাশির বর্গ নির্ণয় : নিয়ম 54 এর অন্তর্গত উদা. 4 এবং 5 এ যথাক্রমে দেখান হইয়াছে যে,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ ;$$

এবং $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$

উপরোক্ত উদাহরণ দুইটিতে দেখা যায় যে, সম্পূর্ণ রাশিটির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেকটি পদের বর্গের সমষ্টি লইয়া উহার সহিত, প্রত্যেকটি পদকে উহার

পরবর্ত্তী সকল পদ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দ্বিগুণ, যোগ করিতে হয়। উপরোক্ত ফলগুলিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিলে মনে রাখা সুবিধাজনক। যথা,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc\,;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd.$$

ইহা দেখান যাইতে পারে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই এই নিয়ম প্রযোজ্য। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $a+b+c+d+e$ এর বর্গ নির্ণয় করা যাউক।

এখন, $(a+b+c+d+e)^2$

$$=\{(a+b+c)+(d+e)\}^2$$
$$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)(d+e)+(d+e)^2$$
$$=\{a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc\}$$
$$+\{2a(d+e)+2b(d+e)+2c(d+e)\}+(d^2+e^2+2de)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2a(b+c+d+e)+2b(c+d+e)$$
$$+2c(d+e)+2de.$$

অতএব, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে, কোন বহুপদরাশির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেক পদের বর্গ লইয়া উহাদের সমষ্টির সহিত, প্রত্যেক পদকে তৎপরবর্ত্তী পদসমূহ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দ্বিগুণ, যোগ করিতে হয়।

বলা বাহুল্য যে, বহুপদরাশিটিতে এক বা একাধিক ঋণাত্মক পদ থাকিলেও উপরিবর্ণিত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে; কারণ, ঐ নিয়মে উল্লিখিত প্রতীকসমূহ অত্যন্ত ব্যাপক অর্থেই প্রযুক্ত হইয়াছে, এবং উহাদের মধ্যে যে কোনটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি নির্দ্দেশ করিতে পারে।

। যেহেতু, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$,

অতএব, $2(ab+ac+bc)=\{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\}-(a^2+b^2+c^2)$
$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2).$$

তদ্রূপ, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.

উদা. 1. $x-y+z-v$ এর বর্গ লিখ।

$$(x-y+z-v)^2=x^2+y^2+z^2+v^2+2x(-y+z-v)$$
$$+2(-y)(z-v)+2z(-v)$$
$$=x^2+y^2+z^2+v^2-2xy+2xz-2xv$$
$$-2yz+2yv-2zv.$$

উদা. 2. $-a+2b-3c-d$ এর বর্গ লিখ।

$$(-a+2b-3c-d)^2 = a^2+4b^2+9c^2+d^2+2(-a)(2b-3c-d) + 2(2b)(-3c-d)+2(-3c)(-d)$$
$$= a^2+4b^2+9c^2+d^2-4ab+6ac+2ad -12bc-4bd+6cd.$$

উদা. 3. $a=19$, $b=18$ এবং $c=32$ হইলে, $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $= a^2+b^2+c^2+2a(b-c)+2b(-c) = (a+b-c)^2$.

অতএব, নির্ণেয় মান $= (19+18-32)^2 = (5)^2 = 25$.

উদা. 4. $x=b+c$, $y=c-a$, $z=a-b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz = x^2+y^2+z^2+2x(-y-z)+2(-y)(-z)$$
$$= (x-y-z)^2 = \{(b+c)-(c-a)-(a-b)\}^2$$
$$= (2b)^2 = 4b^2.$$

প্রশ্নমালা 71

বর্গ নির্ণয় কর :

1. $x+y-z$.
2. $x-y+z$.
3. $-x+y+z$.
4. $-x-y+z$.
5. $x-y-z$.
6. $a-x+y-z$.
7. $a-x-y-z$.
8. $m+n+p+q+r$.
9. $p-q+r-x-y$.
10. $-a+b-c+x-y-z$.
11. $a-2x-3y-4z$.
12. $2a-b+2c-d$.

মান নির্ণয় কর :

13. $l^2+m^2+n^2-2lm+2ln-2mn$, যখন $l=17$, $m=23$ এবং $n=13$.
14. $p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr$, যখন $p=16$, $q=12$ এবং $r=25$.
15. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$, যখন $a=28$, $b=13$ এবং $c=15$.
16. $x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$, যখন $x=6$ এবং $y=7$.
17. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+36$, যখন $x=23$ এবং $y=18$.
18. $x^2+4y^2+1-4xy-2x+4y$, যখন $x=26$ এবং $y=12$.
19. $x^2+9y^2-6xy-2x+6y+64$, যখন $x=49$ এবং $y=16$.
20. $9x^2+y^2-6xy+6x-2y-24$, যখন $x=14$ এবং $y=38$.

21. $a+b+c=12$ এবং $a^2+b^2+c^2=50$ হইলে, $ab+ac+bc$ এর মান নির্ণয় কর।

22. $a+b+c=13$ এবং $ab+ac+bc=50$ হইলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

127. দ্বিপদরাশির শক্তি নির্ণয়ঃ উদ্‌ঘাতন (Involution):

গুণন প্রক্রিয়া দ্বারা দেখান যাইতে পারে যে:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4&=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a-b)^5&=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^6&=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\(a-b)^6&=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6\end{aligned}\right\}$$

টীকা 1. কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা এক বা একাধিক বার পর পর গুণ করিলে, লব্ধ গুণফলকে ঐ রাশির **শক্তি** (power) বলে; এবং ঐ রাশিটিকে গুণন প্রক্রিয়া-নির্দিষ্ট **শক্তিতে উন্নীত** করা হইল, এরূপ বলা হয়। কোন রাশিকে যে কোন শক্তিতে উন্নীত করার প্রক্রিয়াকে **উদ্‌ঘাতন** (involution) বলে; এবং কোন রাশির উদ্‌ঘাতন প্রক্রিয়া দ্বারা যে রাশিমালা পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ রাশির **বিস্তৃতি** (expansion) বলে।

টীকা 2. উপরোক্ত ফলগুলি পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে,

(1) দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃতিতে (expansion এ) লব্ধ পদ-সংখ্যা, ঐ শক্তির সূচক-সংখ্যা হইতে 1 (এক) অধিক হয়। যথা, পঞ্চম শক্তির বিস্তৃতিতে, পদ-সংখ্যা 6, ষষ্ঠ শক্তির বিস্তৃতিতে পদ-সংখ্যা 7, ইত্যাদি।

(2) $a-b$ এর যে কোন শক্তির বিস্তৃতির (expansion) এবং $a+b$ এর সমশক্তির বিস্তৃতির মধ্যে পার্থক্য এই যে, পূর্বোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি একান্তরভাবে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, কিন্তু শেষোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি সমস্তই ধনাত্মক হয়।

(3) কোন দ্বিপদরাশির শক্তিতে যে সূচক থাকে, দ্বিপদরাশির প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ b কে সেই সূচকবিশিষ্ট করিলে যথাক্রমে বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ পাওয়া

যায়। যথা, $a+b$ এর চতুর্থ শক্তির বিস্তৃতিতে a^4 প্রথম পদ এবং b^4 শেষ পদ হয়; $a+b$ এর পঞ্চম শক্তির বিস্তৃতিতে a^5 প্রথম পদ এবং b^5 শেষ পদ হয়; ইত্যাদি। এবং অন্যান্য পদগুলির যে কোনটিতে a এর সূচক, উহার পূর্ব্ববর্ত্তী পদটির a এর সূচক হইতে 1 (এক) কম এবং b এর সূচক, উহার পূর্ব্ববর্ত্তী পদটির b এর সূচক হইতে 1 (এক) বেশী হইয়া থাকে।

(4) বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ দ্বিপদরাশির শক্তির সূচকের সমান হয়; এবং যে কোন পদের সাংখ্য-সহগকে সেই পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে সেই পদের স্থান-নির্দ্দেশক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে, উহার পরবর্ত্তী পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। যথা, দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া 2 দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যাইবে; তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া 3 দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যাইবে; ইত্যাদি।

(5) বিস্তৃতিতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদ দুইটির সাংখ্য-সহগদ্বয় সমান। যথা, প্রথম দিক হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ দিক হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; তদ্রূপ, প্রথম হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; ইত্যাদি।

উল্লিখিত নিয়মসমূহকে সাধারণভাবে প্রতিপন্ন করা, এই পুস্তকে আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত। কিন্তু এইগুলি মনে রাখিলে, দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃতরূপ (expanded form) গুণন প্রক্রিয়া ব্যতিরেকে অতি সহজে লিখিতে পারা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা উপরোক্ত নিয়মসমূহের প্রয়োগ পরিষ্কাররূপে বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $(a+b)^7$ এর বিস্তৃতি (expansion) নির্ণয় কর।

বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা $=8$;

এবং প্রথম পদ $=a^7$,

দ্বিতীয় পদ $=7a^6b$,

তৃতীয় পদ $=\frac{7\times 6}{2}a^5b^2=21a^5b^2$ [নিয়ম (3) এবং (4)]

চতুর্থ পদ $=\frac{21\times 5}{3}a^4b^3=35a^4b^3$;

এখন, যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগগুলি সমান [নিয়ম (5)]; অতএব বিস্তৃতির পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35a^3b^4$, $21a^2b^5$, $7ab^6$ এবং b^7 হইবে।

সুতরাং $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

উদা. 2. $(x-y)^8$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ, বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা $=9$.

প্রথম পদ $= x^8$;

দ্বিতীয় পদ $= -8x^7y$;

তৃতীয় পদ $= \frac{8\times 7}{2}x^6y^2 \quad = 28x^6y^2$;

চতুর্থ পদ $= -\frac{28\times 6}{3}x^5y^3 = -56x^5y^3$;

পঞ্চম পদ $= \frac{56\times 5}{4}x^4y^4 \quad = 70x^4y^4$;

এখন, যেহেতু পরবর্তী চারিটি পদের সাংখ্য-সহগ বিপরীতক্রমে প্রথম চারিপদের সাংখ্য-সহগের সমান, অতএব, বিস্তৃতির ষষ্ঠ, সপ্তম, অষ্টম এবং নবম পদগুলি যথাক্রমে $-56x^3y^5$, $28x^2y^6$, $-8xy^7$ এবং y^8.

সুতরাং, $(x-y)^8 = x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$.

উদা. 3. $(2x-3y)^7$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ, বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা $=8$.

যেহেতু, এস্থলে a এর পরিবর্তে $2x$ এবং b এর পরিবর্তে $3y$ দেওয়া আছে, অতএব, বিস্তৃতিতে,

প্রথম পদ $=(2x)^7$;

য় পদ $= -7(2x)^6(3y)$;

তৃতীয় পদ $= \frac{7\times 6}{2}(2x)^5(3y)^2 = 21(2x)^5(3y)^2$;

চতুর্থ পদ $= -\frac{21\times 5}{3}(2x)^4(3y)^3 = -35(2x)^4(3y)^3$.

কাজেই, পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35(2x)^3(3y)^4$, $21(2x)^2(3y)^5$, $7(2x)(3y)^6$ এবং $-(3y)^7$ হইবে।

সুতরাং,

$$(2x-3y)^7=(2x)^7-7(2x)^6(3y)+21(2x)^5(3y)^2-35(2x)^4(3y)^3$$
$$+35(2x)^3(3y)^4-21(2x)^2(3y)^5+7(2x)(3y)^6-(3y)^7$$
$$=128x^7-7(64x^6)(3y)+21(32x^5)(9y^2)-35(16x^4)(27y^3)$$
$$+35(8x^3)(81y^4)-21(4x^2)(243y^5)+7(2x)(729y^6)-2187y^7$$
$$=128x^7-1344x^6y+6048x^5y^2-15120x^4y^3+22680x^3y^4$$
$$-20412x^2y^5+10206xy^6-2187y^7.$$

উদা. 4. $x=\sqrt[3]{3}-1$ হইলে, $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x-8$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)-9$
$=(x+1)^6-9$
$=(\sqrt[3]{3})^6-9=9-9=0.$

প্রশ্নমালা 72

বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

1. $(x+1)^5$. **2.** $(x+1)^6$. **3.** $(a+b)^8$. **4.** $(a+b)^9$.
5. $(x-y)^5$. **6.** $(m-n)^7$. **7.** $(x+2)^4$. **8.** $(x+2)^5$.
9. $(x+1)^8$. **10.** $(x+3)^4$. **11.** $(x-1)^5$. **12.** $(2-z)^6$.
13. $(2x-1)^4$. **14.** $(x-y)^9$. **15.** $(3x-2)^5$. **16.** $(1-a)^8$.
17. $(1-c)^7$. **18.** $(1-3x)^6$. **19.** $(1-2x)^7$. **20.** $(2x-a)^8$.
21. $(x-a)^{10}$ **22.** $(3x-2a)^5$

সরল কর :

23. $(x+1)^5-(x-1)^5$. **24.** $(x-1)^6+(x+1)^6$. **25.** $(x+a)^7-(x-a)^7$.

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির যোগফল নির্ণয় কর :

26. $(x+a)^4$. **27.** $(x+a)^5$. **28.** $(x+a)^6$.
29. $(x+a)^7$. **30.** $(x+a)^8$.

মান নির্ণয় কর :

31. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+32$, যখন $x=-2$.
32. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x$, যখন $x=\sqrt[3]{2}+1$.
33. $16x^4-32x^3+24x^2-8x-80$, যখন $x=2$.
34. $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$, যখন $x=-5$.
35. $x^4+8x^3+24x^2+32x-609$, যখন $x=-7$.

128. সূত্র ঃ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

[$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=(a+b+c)\{(a^2+b^2-ab)-(ac+bc)+c^2\}$$
$$=(a+b+c)\{\overline{(a+b)^2-3ab}-c(a+b)+c^2\}$$
$$=(\overline{a+b}+c)\{\overline{(a+b)^2-c(a+b)+c^2}-3ab\}$$
$$=\overline{(a+b)^3+c^3}-3ab(\overline{a+b}+c)$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$]

অনুসি.। বিপরীতক্রমে, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$. অতএব, আমরা সর্ব্বদা $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের যে কান রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি।

টীকা। যেহেতু, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$, অতএব, $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

উদা. 1. $x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz$ কে $x-y-z$ দ্বারা গুণ কর।

x এর পরিবর্ত্তে a, $-y$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $-z$ এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$$(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=x^3-y^3-z^3-3xyz.$$

উদা. 2. $m^3-n^3+1+3mn$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

m এর পরিবর্ত্তে a, $-n$ এর পরিবর্ত্তে b এবং 1 এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$$m^3-n^3+1+3mn=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=(m-n+1)(m^2+n^2+1+mn-m+n).$$

উদা. 3. দেখাও যে, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$

$x-y$ এর পরিবর্তে a, $y-z$ এর পরিবর্তে b এবং $z-x$ এর পরিবর্তে c লিখিলে,

$$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.$$

অতএব, $\{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\}-3(x-y)(y-z)(z-x)$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0;$$

$\therefore\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$

প্রশ্নমালা 73

গুণ কর :

1. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$ কে $x+y-z$ দ্বারা।
2. $p^2+4q^2+r^2+2pq+pr-2qr$ কে $p-2q-r$ দ্বারা।
3. $4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz$ কে $2x-3y-z$ দ্বারা।
4. $a^2+4b^2+2ab-3a+6b+9$ কে $a-2b+3$ দ্বারা।
5. $9a^2+25b^2+15ab+12a-20b+16$ কে $3a-5b-4$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

6. $x^3-y^3-1-3xy.$
7. $x^3-y^3+6xy+8.$
8. $x^3-8y^3-27z^3-18xyz.$

মান নির্ণয় কর :

9. $x^3+y^3+18xy-216$ এর, যখন $x+y=6$.
10. $a^3-8b^3-24ab-64$ এর, যখন $a-2b=4$.
11. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$ এর, যখন $3s=a+b+c$.
12. দেখাও যে, $(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3$ $=3(a-2b)(2b-3c)(3c-a)$.
13. দেখাও যে, $(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$ $=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$.
14. দেখাও যে, $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$ $=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$.

15. দেখাও যে, $(2p-5q+3r)^3+(2q-5r+3p)^3+(2r-5p+3q)^3$
$$=3(2p-5q+3r)(2q-5r+3p)(2r-5p+3q).$$

16. $x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2$ হইলে, $x^6+y^6-z^6+3x^2y^2z^2$ এর মান নির্ণয় কর।

17. $x=658,\ y=668,\ z=674$; $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

129. সূত্র : $(a-b)(a-c)(b-c)$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$$

[$(a-b)(a-c)(b-c)=\{a^2-a(b+c)+bc\}(b-c)$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$]

অনুসি. 1. বিপরীতক্রমে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

অতএব, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ এর আকারের যে কোন রাশির উৎপাদকই অবিলম্বে জানিতে পারা যায়।

অনুসি. 2. যেহেতু, $a-c=-(c-a)$,
অতএব, $(a-b)(a-c)(b-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

সুতরাং, পূর্ব্বোক্ত সূত্রটি নিম্নলিখিতরূপেও লিখা যাইতে পারে :
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

অনুসি. 3. যেহেতু, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ কে $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ এর আকারে লিখা যাইতে পারে,
অতএব, $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. । সরল কর : $(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)$
$$+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b).$$

$a+2b+3c$ এর পরিবর্ত্তে x,
$b+2c+3a$ এর পরিবর্ত্তে y,
এবং $c+2a+3b$ এর পরিবর্ত্তে z, লিখিলে,
$y-z=a-2b+c$
$z-x=b-2c+a$
$x-y=c-2a+b$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা
$$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)$$
$$=-(y-z)(z-x)(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0.$$

প্রশ্নমালা 74

দেখাও যে, $(x-2y+z)(2x-y-z)(y-2z+x)=(x-y)^2(y-2z+x)$
$+(y-z)^2(z-2x+y)+(z-x)^2(x-2y+z)$.

দেখাও যে, $(a+b)^2(b-a)+(b+c)^2(c-b)+(c+a)^2(a-c)$
$+(b-a)(c-b)(a-c)=0$.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

3. $2(a-b+c)^2(a-c)+2(b-c+a)^2(b-a)+2(c-a+b)^2(c-b)$.

4. $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z)$.

5. সরল কর : $2(a-b-c)^2(b-c)+2(b-c-a)^2(c-a)$
$+2(c-a-b)^2(a-b)+8(a-b)(b-c)(c-a)$.

6. সরল কর : $(x-y)(y-z)(x-2y+z)+(y-z)(z-x)(y-2z+x)$
$+(z-x)(x-y)(z-2x+y)+(x-2y+z)(y-2z+x)(z-2x+y)$.

130. সূত্র : $\boldsymbol{(b+c)(c+a)(a+b)}$

$$\boldsymbol{=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.}$$

[$(b+c)(c+a)(a+b)=(b+c)\{(a+b)(a+c)\}$
$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

[পদগুলিকে অন্যরূপে সাজাইয়া]

কিন্তু, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$

[পদগুলিকে পুনরায় সাজাইয়া]

$=(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$
$=bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)+ab(a+b+c-c)$
$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-bca-cab-abc$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc$.]

∴ ইহা হইতেই সূত্র-নির্দিষ্ট অভেদগুলি পাওয়া যায়।

131. সূত্র : P, নিম্নলিখিত রাশিত্রয়ের যে কোনটি বুঝাইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+b+c)(bc+ca+ab)=P+3abc$:

(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$;

(iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

[নিয়ম 130 হইতে পক্ষান্তর-করণ, বা প্রকৃত গুণন দ্বারা,

$$\begin{aligned}(a+b+c)(bc+ca+ab) &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\ &= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc\\ &= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.\end{aligned}$$]

উদা. 1. গুণফল নির্ণয় কর : $(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$.

$2x$, $3y$ এবং $5z$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=2x+3y+5z,$$
$$bc+ca+ab=15yz+10zx+6xy\ ;$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)\\ &=(a+b+c)(bc+ca+ab)\\ &=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\ &=4x^2(3y+5z)+9y^2(5z+2x)+25z^2(2x+3y)+3.2x.3y.5z\\ &=12x^2y+20x^2z+45y^2z+18y^2x+50z^2x+75z^2y+90xyz.\end{aligned}$$

উদা. 2. দেখাও যে, $(x+3y+12z)(12yz+4zx+xy)-12xyz$
$$=(y+4z)(12z+x)(x+3y).$$

x, $3y$ এবং $12z$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=x+3y+12z,$$
$$bc+ca+ab=36yz+12zx+3xy=3(12yz+4zx+xy),$$

এবং, $abc=36xyz$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\frac{1}{3}\{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc\}$

$=\frac{1}{3}(b+c)(c+a)(a+b)$ [নিয়ম 130]

$=\frac{1}{3}(3y+12z)(12z+x)(x+3y)$ [a, b এবং c এর মান বসাইয়া]

$=(y+4z)(12z+x)(x+3y)$.

প্রশ্নমালা 75

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল লিখ :

1. $(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$. 2. $(8x+y)(y+5z)(5z+8x)$.

3. $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)$. 4. $(3x+y+10z)(10yz+30zx+3xy)$.

5. $(x+2y+z)(2x+y+z)(x+y+2z)$. 6. $(a-2b)(2b-3c)(3c+a)$.

সরল কর :

7. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

8. $c(b+c-a)(c+a-b)+a(c+a-b)(a+b-c)$
$+b(a+b-c)(b+c-a)+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

9. $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)+(x+y)^2(x+y+2z)$
$-(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$.

10. $2a(b+c-a)^2+2b(c+a-b)^2+2c(a+b-c)^2-3abc$
$+2(a+b+c)\{(c+a-b)(a+b-c)+(a+b-c)(b+c-a)$
$+(b+c-a)(c+a-b)\}$.

11. প্রমাণ কর যে, $(x+y-z)\{(y+z-x)^2+(z+x-y)^2\}+(y+z-x)$
$+\{(z+x-y)^2+(x+y-z)^2\}+(z+x-y)\{(x+y-z)^2+(y+z-x)^2\}$
$+2(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=8xyz$.

132. সূত্র : $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.

[$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$

$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c\{(a+b)+c\}$, [নিয়ম 57]

$=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}+c^3+3(a+b)c(a+b+c)$

$=a^3+b^3+c^3+\{3ab(a+b)+3(a+b)c(a+b+c)\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{ab+c(a+b+c)\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{c^2+c(a+b)+ab\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(c+b)(c+a)$ [নিয়ম 61]

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.]

অনুসি. 1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদা. 1. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$y+z$, $z+x$ এবং $x+y$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিলে,

$$a+b+c=2(x+y+z).$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$

$$=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$

$$=3(b+c)(c+a)(a+b) \quad \text{[অনুসি.]}$$

$$=3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

[a, b এবং c এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. দেখাও যে,

$$(x+y+z)^3=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

এখন, $y+z-x$, $z+x-y$ এবং $x+y-z$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া, $a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z.$

$$b+c=(z+x-y)+(x+y-z)=2x,$$

$$c+a=(x+y-z)+(y+z-x)=2y,$$

এবং $a+b=(y+z-x)+(z+x-y)=2z.$

$\therefore$ $(x+y+z)^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$$

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

প্রশ্নমালা 76

1. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3=3a(c+a)(a+b)$
$=3b(b+c)(b+a)=3c(c+a)(c+b)=3abc.$

2. $2s=x+y+z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz=s^3.$

3. প্রমাণ কর যে, $(2x-y-z)^3+(2y-z-x)^3+(2z-x-y)^3$
$=3(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y).$

4. সরল কর : $(3x-y-z)^3+(3y-z-x)^3+(3z-x-y)^3$
$+24(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)-x^3-y^3-z^3$
$-3(y+z)(z+x)(x+y).$

5. দেখাও যে, $(2x-y-z)^3+y^3+z^3+3(y+z)(2x-y)(2x-z)$
$=(2x-y-3z)^3+y^3+27z^3+3(y+3z)(2x-y)(2x-3z).$

6. $2s = x + y + z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$s^3 + (s - 2x)^3 + (s - 2y)^3 + (s - 2z)^3 - 24(s - x)(s - y)(s - z) = 0.$$

7. $3s = 2(x + y + z)$ হইলে, দেখাও যে, $(s - y - z)^3 + (s - z - x)^3$
$$+ (s - x - y)^3 + 3(y + z - s)(z + x - s)(x + y - s) = 0.$$

সরল কর :

8. $(b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 + (a + b - c)^3 - (a + b + c)^3 + 108abc.$

9. $(x + y + z)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3 - (x + y)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

10. $x^3 - (2x - y - z)^3 - (2y - z - x)^3 + (y - 2z)^3.$

11. $64(x + y + z)^3 - (2x + y + z)^3 - (x + 2y + z)^3 - (x + y + 2z)^3.$

মান নির্ণয় কর :

12. $a^3 + b^3 + c^3$, যখন $b + c = 10$, $c + a = 16$, $a + b = 20$.

13. $x^3 + y^3 + z^3$, যখন $x = 32$, $y = -25$ এবং $z = -7$.

14. $(x + y + z)^3 - (x + z - y)^3 - (y + z - x)^3 - (x + y - z)^3 - 23xyz$,
যখন $x = 10$, $y = 64$ এবং $z = 2$.

15. $(6x - y - z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y + z)(6x - y)(6x - z)$,
যখন $x = \frac{11}{6}$, $y = \frac{115}{113}$ এবং $z = 17$.

133. সূত্রাবলীর পুনরুল্লেখ : পূর্ববর্ণিত সূত্রসমূহের আবশ্যকমত প্রয়োগের সুবিধার জন্য উহাদিগকে নিম্নে সন্নিবেশিত করা হইল। কিন্তু, এই সূত্রগুলিকে ছাত্রগণের এরূপভাবে মুখস্থ করিয়া রাখা কর্তব্য যে, প্রয়োগের সময় উহাদিগকে পুনরায় দেখিয়া লইতে না হয়।

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$

IV. $$\left.\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)\end{aligned}\right\}$$

V. $$\left.\begin{aligned}(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)\end{aligned}\right\}$$

VI. $$\left.\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b)\\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}\right\}$$

VII. $$\left.\begin{aligned}a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b)\\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}\right\}$$

VIII. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

IX. $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab.$

X. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$

XI. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$

XII. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$

XIII. $$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

XIV. $$(a-b)(a-c)(b-c) = -(b-c)(c-a)(a-b) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$$

XV. $$(b+c)(c+a)(a+b) = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc = a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc = bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc = (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

XVI. $$(a+b+c)(bc+ca+ab) = (b+c)(c+a)(a+b)+abc = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc = bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc = a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc.$$

XVII. $$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b) = a^3+b^3+c^3+3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+6abc,$$
অথবা, $$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

নিম্নলিখিত ফলগুলির প্রতি লক্ষ্য রাখা কর্তব্য। ইহাদের সত্যতা, হয় উপরি-প্রদত্ত সূত্রসমূহ হইতে নতুবা প্রকৃত গুণন দ্বারা, অতি সহজেই প্রতিপন্ন করা যায়।

XVIII. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$

XIX. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$ অথবা, $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

XX. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

XXI. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$

XXII. $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$

XXIII. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$

XXIV. $\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

XXV. $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2.$

XXVI. $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3.$

XXVII. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$

XXVIII. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$$

XXIX. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$

XXX. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$

দ্বাবিংশ অধ্যায়

জটিল গুণনীয়ক ও অভেদাবলী

(Harder Factors and Identities)

I. গুণনীয়ক (Factors)

দ্বাদশ অধ্যায়ে a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3 এবং ax^2+bx+c এর আকারের রাশিসমূহকে কি প্রকারে গুণনীয়কে (উৎপাদকে) বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা বর্ণিত হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে জটিলতর রাশিসমূহের বিশ্লেষণ-প্রণালী বর্ণিত হইবে।

134. $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের রাশিসমূহকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

যেহেতু, $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$,

অতএব, $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=a^3+\{(b+c)^3-3bc(b+c)\}-3abc$$
$$=\{a^3+(b+c)^3\}-3bc\{(b+c)+a\}$$
$$=\{a+(b+c)\}\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}-3bc(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

উদা. 1. $a^3-b^3+c^3+3abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=a^3+(-b)^3+c^3-3a(-b)c$
$$=\{a+(-b)+c\}\{a^2+(-b)^2+c^2-(-b)c-ca-a(-b)\}$$
$$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab).$$

উদা. 2. $x^3-y^3+6xy+8$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=x^3+(-y)^3+(2)^3-3x(-y).2$
$=\{x+(-y)+2\}\{x^2+(-y)^2+2^2-(-y).2-2x-x(-y)\}$
$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+2y-2x+xy).$

উদা. 3. x^6+32x^3-64 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=x^6+8x^3-64+24x^3$
$=(x^2)^3+(2x)^3+(-4)^3-3.x^2.2x.(-4)$
$=\{x^2+2x+(-4)\}\{(x^2)^2+(2x)^2+(-4)^2-2x(-4)-(-4)x^2-x^2.2x\}$
$=(x^2+2x-4)(x^4+4x^2+16+8x+4x^2-2x^3)$
$=(x^2+2x-4)(x^4-2x^3+8x^2+8x+16).$

উদা. 4. ভাগফল নির্ণয় কর : $a^3+b^3+1-3ab$ কে $a+b+1$ দ্বারা।

যেহেতু, $a^3+b^3+1-3ab=a^3+b^3+1^3-3ab.1$
$=(a+b+1)\{a^2+b^2+1^2-b.1-1.a-ab\}$
$=(a+b+1)(a^2+b^2+1-b-a-ab)$;

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=a^2+b^2+1-b-a-ab.$

প্রশ্নমালা 77

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3+y^3-z^3+3xyz.$
2. $p^3-8q^3-r^3-6pqr.$
3. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz.$
4. $a^3+8b^3+1-6ab.$
5. $8a^3+27b^3-64+72ab.$
6. ভাগফল নির্ণয় কর : $x^3-y^3+6xy+8$ কে $x-y+2$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

7. $x^6+5x^3+8.$
8. $(x-y)^3-(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)(x-y).$
9. $a^6-18a^3+125.$

ভাগফল নির্ণয় কর :

10. $x^3+27-5y(25y^2-9x)$ কে $x^2+25y^2+9+5xy-3x+15y$ দ্বারা।
11. $a^3+b^3-c^3+3abc$ কে $a+b-c$ দ্বারা।

12. $x^3 - y^3 - 1 - 3xy$ কে $x - y - 1$ দ্বারা।

13. $x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$ কে $x - 2y + 3z$ দ্বারা।

14. $8a^3 - 27b^3 - c^3 - 18abc$ কে $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 6ab + 2ac - 3bc$ দ্বারা।

15. $14a^3 - 4b^3 + 9a^2b$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

135. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ এর আকারের রাশি-সমূহের বিশ্লেষণ :

উল্লিখিত রাশি $= \{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\} - abc$

$$= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c) = (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$$
$$= (b+c)(a+b)(a+c) = (b+c)(c+a)(a+b).$$

অনুসি. 1. $(a+b+c)(bc+ca+ab) - (b+c)(c+a)(a+b) = abc.$

অনুসি. 2. $(b+c)(c+a)(a+b) + abc = (a+b+c)(bc+ca+ab).$

136. নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের উৎপাদকে বিশ্লেষণ :
(i) $P+2abc$ এবং **(ii) $P+3abc$,**

যখন P নিম্নোক্ত রাশিত্রযের যে কোনটি বুঝাইতেছে :

(1) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$

(2) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$

(3) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$

(i) P, (1) দ্বারা সূচিত রাশিটিকে বুঝাইলে,

$$P + 2abc = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$
$$= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + b^2c + bc^2$$
$$= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c)$$
$$= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$$
$$= (b+c)(a+b)(a+c) = (b+c)(c+a)(a+b).$$

(ii) P, (2) দ্বারা সূচিত রাশিটিকে বুঝাইলে,

$$P + 3abc = bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$$
$$= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + abc + abc + abc$$
$$= \{bc(b+c) + abc\} + \{ca(c+a) + abc\} + \{ab(a+b) + abc\}$$
$$= bc(a+b+c) + ca(c+a+b) + ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

137. নিম্নোক্ত রাশিসমূহের যে কোনটি Q দ্বারা সূচিত হইলে, Q এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(2) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

(3) $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$.

Q এর প্রথম আকার লইলে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

অনুসি.। a, b, c এর পরিবর্তে যথাক্রমে a^2, b^2 এবং c^2 বসাইলে,

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

উদা.। গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$$

প্রদত্ত রাশি $=(x^2-2ax+a^2)(b-c)+(x^2-2bx+b^2)(c-a)+(x^2-2cx+c^2)(a-b)$

$$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}-2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=x^2.0-2x.0-(b-c)(c-a)(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

138. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$

[a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a-c)-bc(a-c)+a(a^2-c^2)\}$$

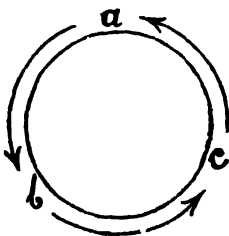
[b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(a-c)\{-b^2-bc+a(a+c)\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a-b)+a^2-b^2\}$$

[c এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(a-c)(a-b)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-x)(a-b)(a+b+c).$$

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রদত্ত রাশিমালাকে (i) a এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলেই, $b-c$ উৎপাদকটি অবিলম্বে পাওয়া যায়; (ii) ইহার পর, ধনুর্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে আবার b এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলে, পরবর্ত্তী উৎপাদক $a-c$ সহজে পাওয়া যায়; (iii) সর্ব্বশেষে, আবার ধনুর্ব্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে c এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলে, তৃতীয় উৎপাদক $a-b$ পাওয়া যায়।

139. চক্র-ক্রম (Cyclic order): 137 ও 138 নিয়মে উল্লিখিত রাশিসমূহে, a, b, c অক্ষর তিনটির বিন্যাস একটু বিশেষত্বযুক্ত। দৃষ্টান্তস্বরূপ, 137 নিয়মে উল্লিখিত Q এর তুল্য আকারত্রয়ের যে কোনটির প্রথম পদে a, b, c এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে b, c, a লিখিলেই উহার দ্বিতীয় পদটি পাওয়া যায়; আবার, দ্বিতীয় পদে b, c, a এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে c, a, b লিখিলে তৃতীয় পদ, এবং তৃতীয় পদে c, a, b এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b, c লিখিলে প্রথম পদ, পাওয়া যায়। a, b, c অক্ষর তিনটিকে, কোন্ ক্রম-অনুসারে ক্রমান্বয়ে পরিবর্ত্তিত করিতে হইবে, তাহা নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে বুঝা যায়।

a, b, c অক্ষর তিনটিকে (চিত্রে যেরূপ প্রদর্শিত হইয়াছে) একটি বৃত্তের পরিধির উপর সাজাও; এখন, a হইতে আরম্ভ করিয়া তীর-চিহ্ননির্দ্দিষ্ট দিকে চলিতে থাকিলে, পরিধির উপরিস্থিত অক্ষর তিনটিকে abc এই ক্রমে পাওয়া যায়; তদ্রূপ, b ও c হইতে আরম্ভ করিয়া পূর্ব্বোল্লিখিত দিকে চলিতে থাকিলে অক্ষরত্রয়কে যথাক্রমে bca ও cab ক্রমে পাওয়া যায়।

যদি তিনটি অক্ষর a, b, c উপরোক্তরূপে বিন্যস্ত হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্যাসকে **চক্র-ক্রম** (cyclic order) বলে।

নিম্নে a, b, c এর চক্র-ক্রম বিন্যাসযুক্ত কতিপয় রাশি দেওয়া হইল:

(i) $b+c, c+a$ এবং $a+b$; (ii) $b-c, c-a$ এবং $a-b$;

(iii) $b+c-a, \quad c+a-b$ এবং $a+b-c$; (iv) bc, ca এবং ab;

(v) $a^2(b-c), \quad b^2(c-a)$ এবং $c^2(a-b)$; ইত্যাদি।

140. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ এর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ:

এক্ষেত্রেও, অক্ষরগুলি চক্র-ক্রম অনুসারে বিন্যস্ত হওয়ায়, পূর্ব্ব উদাহরণের প্রণালী অনুযায়ী প্রক্রিয়া আরম্ভ করিতে হইবে।

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$$

[a এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]

$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a^2-c^2)+ba^2(a-c)+a^2c(a-c)\}$$

[b এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]

$$=(b-c)(a-c)\{-b^2(a+c)+ba^2+a^2c\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a^2-b^2)+ab(a-b)\}$$

[c এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]

$$=(b-c)(a-c)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

141. সূত্র : $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ এর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ :

142. সূত্র : $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ : [132 নিয়মের অনুসি. দেখ]

প্রদত্ত রাশি $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$

$$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$
$$=\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}$$
$$=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}$$
$$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$$
$$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

প্রশ্নমালা 78

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$
2. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2).$
3. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b).$
4. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3).$
5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b).$
6. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz.$

7. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

9. $(x^2+2x+4)(y-z)+(y^2+2y+4)(z-x)+(z^2+2z+4)(x-y)$.

10. $\{x^2-(b+c)x+bc\}(b-c)+\{x^2-(c+a)x+ca\}(c-a)$
$+\{x^2-(a+b)x+ab\}(a-b)$.

11. $(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)+(x+a)(x+b)(a-b)$.

12. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-3abc$.

13. $8x^3-(y-z)^3-(z+x)^3-(x-y)^3$.

14. $a^6(b^3-c^3)+b^6(c^3-a^3)+c^6(a^3-b^3)$.

15. $x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$.

16. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$.

17. $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)-x^3-y^3-z^3-2xyz$.

18. $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$.

19. $(x+1)^3(y-z)+(y+1)^3(z-x)+(z+1)^3(x-y)$.

20. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

21. $2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4-c^4z^4$.

22. $72y^2z^2+18z^2x^2+8x^2y^2-x^4-16y^4-81z^4$.

23. $b+c-a=7$, $c+a-b=10$ এবং $a+b-c=3$ হইলে, $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর মান নির্ণয় কর।

24. $a+b+c=20$, $bc+ca+ab=18$ এবং $abc=37$ হইলে, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ এর মান নির্ণয় কর।

25. $a+b+c=13$ এবং $a^2+b^2+c^2=69$ হইলে, $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3+3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

143. বিপরীত রাশিমালার (Reciprocal Expression এর) গুণনীয়ক নির্ণয়:

সংজ্ঞা: যে রাশিমালাতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদদ্বয়ের সহগ দুইটি পরস্পর সমান, তাহাকে **বিপরীত রাশিমালা** (Reciprocal or recurring expression) বলে। যথা, $x^4+4x^3+5x^2+4x+1$ একটি বিপরীত রাশিমালা।

উদা. 1. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+1)+(2x^3+2x)+3x^2$,

[সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে সংযুক্ত করিয়া]

$$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+2x(x^2+1)+3x^2$$
$$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+3x^2-2x^2$$
$$=(x^2+1)^2+2(x^2+1).x+x^2$$
$$=\{(x^2+1)+x\}^2=(x^2+x+1)^2.$$

উদা. 2. $a^4-5a^3-12a^2-5a+1$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^4+1)-(5a^3+5a)-12a^2$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে সংযুক্ত করিয়া]

$$=\{(a^2+1)^2-2a^2\}-5a(a^2+1)-12a^2$$
$$=(a^2+1)^2-5(a^2+1).a-2a^2-12a^2$$
$=x^2-5xa-14a^2$, [a^2+1 এর পরিবর্তে x লিখিয়া]
$$=(x+2a)(x-7a)$$
$=(a^2+1+2a)(a^2+1-7a)$ [x এর পরিবর্তে a^2+1 লিখিয়া]
$$=(a+1)^2(a^2-7a+1).$$

144. পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয়ঃ

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^3-2x^2-5x+6.

পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে এরূপভাবে বিভিন্ন ভাগে বিন্যস্ত করা যায়, যাহাদের প্রত্যেকে $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য। যথা,

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3-x^2-x^2+x-6x+6$
$$=(x^3-x^2)-(x^2-x)-(6x-6)$$
$$=x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3).$$

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে 1, -2, অথবা 3 বসাইলে রাশিমালার মান প্রত্যেক ক্ষেত্রেই 0 হয়। এতদনুসারে সাধারণভাবে বলা যায় যে, **x সমন্বিত কোন রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে a বসাইলে যদি রাশিমালার মান 0 (শূন্য) হয়, তবে ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক $x-a$ হইবে।**

উপরোক্ত সাধারণ নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায় :

x সমন্বিত কোন রাশিমালায় x এর শক্তির সূচকগুলি পূর্ণ (integral) সংখ্যা হইলে,

(1) যদি উহার বিভিন্ন পদগুলির সহগের বীজগণিতীয় যোগফল 0 হয়, তবে $x-1$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে।

(2) যদি অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল, অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফলের সমান হয়, তবে $x+1$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। যথা,

প্রথম উদাহরণে, বিভিন্ন পদগুলির সহগের যোগফল

$$=1+(-2)+(-5)+6=1-2-5+6=0.$$

অতএব, $x-1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক।

আবার, x^3+3x^2+3x+1 তে, x^3 এবং x ই, x এর অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদ। এই পদদ্বয়ের সহগের যোগফল $=1+3=4$; এবং অবশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=3+1=4$. এই উভয় যোগফলই সমান হওয়ায়, বুঝা যাইতেছে যে, x^3+3x^2+3x+1 এর একটি উৎপাদক $x+1$ হইবে।

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3+6x^2+11x+6$.

x এর অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=1+11=12$; এবং অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফল $=6+6=12$. অতএব, $x+1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। এখন, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে এরূপভাবে সঙ্ঘবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সঙ্ঘ $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$$
$$=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)$$
$$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3).$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $8x^3+16x-9$.

$2x$ এর পরিবর্তে y লিখিলে, প্রদত্ত রাশিমালা $=(2x)^3+8.(2x)-9$

$$=y^3+8y-9.$$

এখন, y^3+8y-9 এর সহগগুলির যোগফল $=1+8-9=0$.

অতএব, এই রাশিমালার একটি উৎপাদক $y-1$ হইবে। এখন, ইহার পদগুলিকে এরূপভাবে সঙ্ঘবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সঙ্ঘ $y-1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

$$y^3+8y-9=y^3-y+9y-9=y(y^2-1)+9(y-1)$$
$$=(y-1)\{y(y+1)+9\}=(y-1)(y^2+y+9)$$
$$=(2x-1)(4x^2+2x+9). \qquad [y \text{ এর পরিবর্তে } 2x \text{ বসাইয়া}]$$

উদা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^5+4x^4-13x^3-13x^2+4x+1$.

এক্ষেত্রে দেখা যায় যে,

অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=1+(-13)+4=-8$;

এবং অবশিষ্ট সহগগুলির যোগফল $=4+(-13)+1=-8$. এই উভয় যোগফল সমান হওয়ায়, প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক $x+1$ হইবে।

এখন, রাশিমালার পদসমূহকে এরূপভাবে সঙ্ঘবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সঙ্ঘ $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^5+x^4)+(3x^4+3x^3)-(16x^3+16x^2)+(3x^2+3x)+(x+1)$

$$=x^4(x+1)+3x^3(x+1)-16x^2(x+1)+3x(x+1)+(x+1)$$

$$=(x+1)(x^4+3x^3-16x^2+3x+1).$$

আবার, $x^4+3x^3-16x^2+3x+1$ উৎপাদকটি একটি বিপরীত রাশিমালা (reciprocal expression) হওয়ায়, 143 নিয়মে বর্ণিত প্রণালী অনুসারে,

$x^4+3x^3-16x^2+3x+1=(x^4+1)+(3x^3+3x)-16x^2$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+3x(x^2+1)-16x^2$$

$$=(x^2+1)^2+3(x^2+1)x-2x^2-16x^2$$

$=y^2+3yx-18x^2$ [x^2+1 এর পরিবর্তে y বসাইয়া]

$$=(y-3x)(y+6x)$$

$$=(x^2+1-3x)(x^2+1+6x),$$

[y এর পরিবর্তে উহার মান x^2+1 লিখিয়া]

$$=(x^2-3x+1)(x^2+6x+1).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $=(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1)$.

উদা. 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3+x^2-21x-38$.

পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল যে, x এর পরিবর্তে -2 বসাইলে রাশিমালার মান 0 হয়। কাজেই, $x-(-2)$ অর্থাৎ $x+2$ উহার একটি উৎপাদক হইবে।

অতএব, $x^3+x^2-21x-38=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(19x+38)$

[$x+2$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, এরূপ সঙ্ঘে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$=x^2(x+2)-x(x+2)-19(x+2)$$

$$=(x+2)(x^2-x-19).$$

145. দুই মাত্রা (dimension) বিশিষ্ট সমমাত্র রাশিমালার (homogeneous expression এর) গুণনীয়ক নির্ণয় :

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়াপ্রণালী বুঝান যাইতেছে :

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $6a^2+7ab+2b^2+11ac+7bc+3c^2$.

প্রদত্ত রাশিমালায়, $a=0$ ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=2b^2+7bc+3c^2$
$=(2b+c)(b+3c)$ ... (1)

প্রদত্ত রাশিমালায়, $b=0$ ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=6a^2+11ac+3c^2$
$=(3a+c)(2a+3c)$ ... (2)

প্রদত্ত রাশিমালায়, $c=0$ ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=6a^2+7ab+2b^2$
$=(3a+2b)(2a+b)$ ... (3)

এখন, (1), (2), (3) দ্বারা সূচিত ফলগুলি হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, **প্রদত্ত রাশিমালা $=(3a+2b+c)(2a+b+3c)$;** [কারণ, এই গুণনীয়ক দুইটিতে, (i) $a=0$ বসাইলে (1) দ্বারা সূচিত গুণনীয়কদ্বয়, (ii) $b=0$ বসাইলে (2) দ্বারা সূচিত গুণনীয়কদ্বয় এবং (iii) $c=0$ বসাইলে (3) দ্বারা সূচিত গুণনীয়কদ্বয় পাওয়া যায় ।]

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method) : প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর a এর, শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=6a^2+(7b+11c)a+(2b^2+7bc+3c^2)$
$=6a^2+(7b+11c)a+(2b+c)(b+3c)$.

এখন, $(2b+c)(b+3c)$ এবং (a^2 এর সহগ) 6 এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ (অর্থাৎ, $7b+11c$)এর সমান হয় । পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, $2(2b+c)$ এবং $3(b+3c)$ এই দুইটিই নির্ণেয় উৎপাদক ।

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $=6a^2+2(2b+c)a+3(b+3c)a+(2b+c)(b+3c)$
$=2a\{3a+(2b+c)\}+(b+3c)\{3a+(2b+c)\}$
$=(3a+2b+c)(2a+b+3c)$.

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2-3xy+2y^2-2yz-4z^2$.

স্পষ্টতঃ ইহা x, y, z সমন্বিত একটি সমমাত্র রাশিমালা ।

ইহাতে $x=0$ ধরিলে, ইহার অবশিষ্টাংশ
$=2y^2-2yz-4z^2=2(y^2-yz-2z^2)$
$=2(y+z)(y-2z)=(2y+2z)(y-2z)$ ... (1)

আবার, প্রদত্ত রাশিমালাতে $y=0$ ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ
$=x^2-4z^2=(-x+2z)(-x-2z)$ ... (2)

এবং প্রদত্ত রাশিমালাতে $z=0$ ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ

$$=x^2-3xy+2y^2=(-x+2y)(-x+y) \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, (1), (2), (3) দ্বারা সূচিত ফলগুলি হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=(-x+2y+2z)(-x+y-2z)$$
$$=(x-2y-2z)(x-y+2z).$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন একটি অক্ষরের (ধর x এর), শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=x^2-3yx+(2y^2-2yz-4z^2)$$
$$=x^2-3yx+2(y+z)(y-2z).$$

এখন, x^2 এর সহগ (অর্থাৎ 1) এবং x-বর্জ্জিত পদ (term independent of x) [অর্থাৎ, $2(y+z)(y-2z)$] এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি x এর সহগ (অর্থাৎ, $-3y$) এর সমান হয়। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, $-2(y+z)$ এবং $-(y-2z)$ই নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয়।

$$\text{অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা}=x^2-2(y+z)x-(y-2z)x+2(y+z)(y-2z)$$
$$=x\{x-2(y+z)\}-(y-2z)\{x-2(y+z)\}$$
$$=(x-2y-2z)(x-y+2z).$$

146. দুই বা তদধিক অক্ষরবিশিষ্ট দ্বি-মাত্র (of the second degree) রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় :

উদা.। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $6a^2+7ab+2b^2+11a+7b+3$.

প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর a এর, শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=6a^2+(7b+11)a+(2b^2+7b+3)$$
$$=6a^2+(7b+11)a+(2b+1)(b+3).$$

এখন, a^2 এর সহগ (অর্থাৎ 6) এবং a-বর্জ্জিত অংশ [অর্থাৎ $(2b+1)(b+3)$] এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ [অর্থাৎ $7b+11$] এর সমান হয়। এই উৎপাদকদ্বয় স্পষ্টতঃই $2(2b+1)$ এবং $3(b+3)$].

$$\text{অতএব প্রদত্ত রাশিমালা}=6a^2+2(2b+1)a+3(b+3)a+(2b+1)(b+3)$$
$$=2a\{3a+(2b+1)\}+(b+3)\{3a+(2b+1)\}$$
$$=(3a+2b+1)(2a+b+3).$$

147. যথোচিত পদ-বিন্যাস (arrangements of terms) ও সঙ্ঘবদ্ধ-করণ (grouping) দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয়ঃ কোন কোন স্থলে, রাশিমালার পদগুলিকে কোন এক নির্দ্দিষ্টরূপে সাজাইলেই উহার গুণনীয়ক-গুলি সুস্পষ্ট হইয়া পড়ে; কিন্তু অনেক স্থলে আবার এরূপ হয় না। কাজেই, বর্ত্তমান নিয়মের অন্তর্ভুক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়ার জন্য কোন নির্দ্দিষ্ট প্রণালী দেওয়া যায় না। সুতরাং, নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা কতকগুলি পরস্পর-বিচ্ছিন্ন বিশ্লেষণ-প্রণালীর প্রতি ছাত্রদিগের দৃষ্টি আকৃষ্ট করা যাইতেছে; ইহা দ্বারা তাহাদের আলোচ্য বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।

উদা. 1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $(3x^2-4b^2)a+(3a^2-4x^2)b.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=3x^2a-4l^2a+3a^2b-4x^2b$

$=(3x^2a+3a^2b)-(4b^2a+4x^2b)$

[১ম ও ৩য় পদদ্বয়, এবং ২য় ও ৪র্থ পদদ্বয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$=3a(x^2+ab)-4b(ab+x^2)$

$=(x^2+ab)(3a-4b).$

উদা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^4+x^2y^2-y^2z^2-z^4.$

প্রথম ও চতুর্থ পদদ্বয়, এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদদ্বয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4-z^4)+(x^2y^2-y^2z^2)$

$=(x^2+z^2)(x^2-z^2)+y^2(x^2-z^2)$

$=(x^2-z^2)\{(x^2+z^2)+y^2\}$

$=(x+z)(x-z)(x^2+y^2+z^2).$

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^3+7x^2-21x-27.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3-27)+(7x^2-21x)$

$=(x-3)(x^2+3x+9)+7x(x-3)$

$=(x-3)\{(x^2+3x+9)+7x\}$

$=(x-3)(x^2+10x+9)$

$=(x-3)(x+9)(x+1).$

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $4a^2+12ab+9b^2-8a-12b.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4a^2+12ab+9b^2)-(8a+12b)$

$=(2a+3b)^2-4(2a+3b)=(2a+3b)\{(2a+3b)-4\}$

$=(2a+3b)(2a+3b-4).$

উদা. 5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $2a^2 - 2bc + 6b^2 + ac - 7ab$.

এস্থলে দেখা যাইতেছে যে, প্রথম, তৃতীয় এবং পঞ্চম, এই পদ তিনটি a ও b অক্ষরদ্বয়ে দুই মাত্রাবিশিষ্ট, এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ দুইটি ঐ অক্ষরদ্বয়ে এক মাত্রাবিশিষ্ট। কাজেই, প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং শেষোক্ত পদ দুইটিকে একত্র, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা $= (2a^2 - 7ab + 6b^2) + c(a - 2b)$

$$= (a - 2b)(2a - 3b) + c(a - 2b)$$
$$= (a - 2b)\{(2a - 3b) + c\}$$
$$= (a - 2b)(2a - 3b + c).$$

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$.

প্রদত্ত রাশিমালা $= (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) + (x + y - z)$

$$= \{x^2 - (y - z)^2\} + (x + y - z)$$
$$= (x + y - z)(x - y + z) + (x + y - z)$$
$$= (x + y - z)\{(x - y + z) + 1\}$$
$$= (x + y - z)(x - y + z + 1).$$

উদা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$$a^2x^3 + a^5 - 2abx^3 + b^2x^3 + a^3b^2 - 2a^4b.$$

এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, প্রথম, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ তিনটিতে x^3 উৎপাদকটি সাধারণ (common) এবং অবশিষ্ট পদগুলিতে a^3 উৎপাদকটি সাধারণ।

কাজেই, প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে একত্র, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা $= (a^2x^3 - 2abx^3 + b^2x^3) + (a^5 + a^3b^2 - 2a^4b)$

$$= x^3(a^2 - 2ab + b^2) + a^3(a^2 + b^2 - 2ab)$$
$$= (a^2 - 2ab + b^2)(x^3 + a^3)$$
$$= (a - b)^2(x + a)(x^2 - xa + a^2).$$

প্রশ্নমালা 79

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3 + x^2 + x + 1$.
2. $x^3 + x^2 - x - 1$.
3. $x^3 - x^2 - x + 1$.
4. $bc(a^2 + 1) + a(b^2 + c^2)$.
5. $x^4 - ab^3 + xb^3 - x^3a$.
6. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.
7. $x^2 + xy - yz - z^2$.
8. $xb - ac - xc + ab$.
9. $(2x^2 + 3b^2)a - (2a^2 + 3x^2)b$.
10. $a(a + c) - b(b + c)$.
11. $4a^2 + 8ac - 12bc - 9b^2$.
12. $a^2x^2 + acxz - b^2y^2 - bcyz$.

13. $x^4 - y^3z + y^2x^2 - y^2z^2$.
14. $16x^2 - 15ab + 12bx - 25a^2$.
15. $a^2(a+2b) + b^2(2a+b)$.
16. $m^3 - 2m^2n + 2mn^2 - n^3$.
17. $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$.
18. $x^3(x-2y) + y^3(2x-y)$.
19. $a^3 + 5a^2 + 10a + 8$.
20. $x^3 - 17x^2 + 85x - 125$.
21. $8a^3 + 18a^2b - 27ab^2 - 27b^3$.
22. $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$.
23. $4a^2 - 4ab + b^2 - 6a + 3b$.
24. $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4$.
25. $a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 4b^4$.
26. $a^2 + 3ab + 2b^2 + ac + 2bc$.
27. $x^2 - 4xy + 3y^2 + xz - 3yz$.
28. $m^2 + 2pm - 5mn - 4pn + 6n^2$.
29. $a^2 - 10ab - 15bc + 21b^2 + 5ac$.
30. $2x^2 + 4a(4b-3a) + x(4b+5a)$.
31. $a^2 - 3a(2b-1) + 4b(2b-3)$.
32. $3x(x+2) - 2y(4x-1) - 3y^2$.
33. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$.
34. $x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz + 4x - 8y + 12z$.
35. $9x^2 - 4z^2 - 24xy + 16y^2 + 20y - 15x + 10z$.
36. $2a^2x^4 - 5a^4x^2 + 3a^6 - 2b^2x^4 + 5a^2b^2x^2 - 3a^4b^2$.
37. $2x^3 + (2a-3b)x^2 - (2b+3ab)x + 3b^2$.
38. $(a^2+b^2)x^2 - a^2b(2a+b) + a(2bx^2 - a^3)$.
39. $2a^4 - 5a^3 + 6a^2 - 5a + 2$.
40. $a^5 - 4a^4 - 13a^3 + 13a^2 + 4a - 1$.
41. $2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5xz + 6yz + 2z^2$.
42. $2x^2 + xy - 3y^2 - xz - 4yz - z^2$.
43. $a^8 - 5a^6 - 12a^4 - 5a^2 + 1$.
44. $4x^2 - 4xy - 3y^2 + 12yz - 9z^2$.
45. $x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5$.
46. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$.

148. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $a^3 + 7ab^2 - 22b^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে নিম্নলিখিত দুই প্রকারের যে কোন এক প্রকারে, দুইভাগে ভাগ করিলে দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি ভাগই $a+2b$ দ্বারা বিভাজ্য।

(i) $(a^3 - 8b^3) + 7b^2(a-2b)$; (ii) $a(a^2 - 4b^2) + 11b^2(a-2b)$.

প্রথমোক্তরূপে বিভাগ করিয়া,

$$a^3 + 7ab^2 - 22b^3 = (a^3 - 8b^3) + 7b^2(a-2b)$$
$$= (a-2b)\{(a^2+2ab+4b^2) + 7b^2\}$$
$$= (a-2b)(a^2+2ab+11b^2).$$

উদা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2+2(a^2+b^2)+3ax-b(3x+5a)$.

x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x^2+3(a-b)x+(2a^2-5ab+2b^2)\\ &= x^2+3(a-b)x+(2a-b)(a-2b)\\ &= x^2+\{(2a-b)+(a-2b)\}x+(2a-b)(a-2b)\\ &= x\{x+(2a-b)\}+(a-2b)\{x+(2a-b)\}\\ &= \{x+(2a-b)\}\{x+(a-2b)\}\\ &= (x+2a-b)(x+a-2b).\end{aligned}$$

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2-6xy+8y^2-z^2+2yz$.

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= (x^2-6xy+9y^2)-(y^2+z^2-2yz)\\ &= (x-3y)^2-(y-z)^2\\ &= \{(x-3y)+(y-z)\}\{(x-3y)-(y-z)\}\\ &= (x-2y-z)(x-4y+z).\end{aligned}$$

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy\\ &= (a^2x^2+b^2y^2+2abxy)-(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)\\ &= (ax+by)^2-(ay-bx)^2\\ &= \{(ax+by)+(ay-bx)\}\{(ax+by)-(ay-bx)\}\\ &= \{(a-b)x+(a+b)y\}\{(a+b)x-(a-b)y\}.\end{aligned}$$

উদা. 5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^4+6x^3+4x^2-15x+6$.

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= (x^4+6x^3+9x^2)-(5x^2+15x)+6\\ &= (x^2+3x)^2-5(x^2+3x)+6\\ &= \{(x^2+3x)-2\}\{(x^2+3x)-3\}\\ &= (x^2+3x-2)(x^2+3x-3).\end{aligned}$$

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= (x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2+(2x^3y+2xy^3)\\ &= (x^2+y^2)^2+(xy)^2+2(xy)(x^2+y^2)\\ &= \{(x^2+y^2)+xy\}^2=(x^2+xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

উদা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$.

এখন, $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$.

কাজেই, x^2+2x এর পরিবর্তে z বসাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(z-3)(z-8)+4$
$=z^2-11z+28=(z-4)(z-7)$
$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$.

টীকা। বিশেষরূপে লক্ষ্য করিবে যে, উপরিপ্রদর্শিত দ্বিপদরাশি (binomial)-গুলির গুণনকালে, $x+3$ কে $x-1$ এর সহিত এবং $x+4$ কে $x-2$ এর সহিত গুণ করা হইয়াছে।

উদা. 8. $x+y=a$ এবং $xy=b^2$ হইলে,
(i) x^4+y^4 এবং (ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ এর মান a ও b তে প্রকাশ কর।

(i) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2x^2y^2$,

কাজেই, নির্ণেয় মান $=(a^2-2b^2)^2-2b^4=a^4-4a^2b^2+2b^4$.

(ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2-y^2)$
$=(x-y)^2(x+y)$
$=\{(x+y)^2-4xy\}(x+y)$
$=(a^2-4b^2)a$.

উদা. 9. $x^2+2=2x$ হইলে, $x^4-x^3+x^2+2$ এর মান নির্ণয় কর।

$x^4-x^3+x^2+2=(x^4+x^3+x^2)-2(x^3-1)$
$=x^2(x^2+x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)$
$=(x^2+x+1)\{x^2-2(x-1)\}$
$=(x^2+x+1)(x^2-2x+2)$.

অতএব, নির্ণেয় মান $=(x^2+x+1)\times 0=0$.

উদা. 10. $a+b=c$ হইলে,
$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=-(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)$
$=-(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a)$

এবং $=0$, কারণ $a+b=c$.

প্রশ্নমালা 80

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3+8x^2+19x+12.$
2. $x^3+9x^2+26x+24.$
3. $x^3-6x^2+11x-6.$
4. $x^3+5x^2-2x-24.$
5. $x^3-4x^2+x+2.$
6. $x^3+5x^2-2x-6.$
7. $x^3-6x^2+13x-10.$
8. $x^4-3x^3-9x^2+12x+20.$
9. $x^4-3x^3-x^2+13x-10.$
10. $x^4-5x^3+x^2+13x+6.$
11. $x^4+5x^3-8x^2-30x+36.$
12. $x^4-7x^3+9x^2+26x-56.$
13. $x^3-7x^2+13x-15.$
14. $x^3-5x+12.$
15. $x^3-6x^2+32.$
16. $2x^3-3x^2-4.$
17. $x^3-9xy^2-10y^3.$
18. $a^3+4a^2b-9b^3.$
19. $5a^3-3a^2b-28b^3.$
20. $8x^3+4x-3.$
21. $2x^3+5x^2-4x-3.$
22. $x^3-3x-2.$
23. $2a^3-a^2b-b^3.$
24. $3x^3+8x^2-8x-3.$
25. $x^3-6xy^2+9y^3.$
26. $x^2+bx-(a^2-3ab+2b^2).$
27. $x^4+4abx^2y^2-(a^2-b^2)^2y^4.$
28. $a^4+2(x^2+y^2)a^2b^2+(x^2-y^2)^2b^4.$
29. $a^2+(x+y)a-2x^2+5xy-2y^2.$
30. $x(x+a)-2a^2+3b(a+x)+2b^2.$
31. $x^2+4xy+3y^2+2yz-z^2.$
32. $4a^2-4ab-3b^2+12bc-9c^2.$
33. $x^4+6x^3+8x^2+6x-9.$
34. $a^4-4a^3b-5a^2b^2+6ab^3-b^4.$
35. $4x^4-20x^3+24x^2+6x-9.$
36. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$
37. $a^4-9a^2+30a-25.$
38. $a^2-2abx-(ac-b^2)x^2+bcx^3.$
39. $x^4y^4+x^2y^2-z^2+2xyz+1.$
40. $x^2(y^2-z^2)+4xyz-y^2+z^2.$
41. $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy.$
42. $x^4-4x^3-x^2+10x+4.$
43. $a^4-6a^3+15a^2-18a+5.$
44. $4x^4+12x^3-5x^2-21x+12.$
45. $x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4.$
46. $x^4-5x^3+14x^2-20x+16.$
47. $a^4-7a^3b+14a^2b^2-14ab^3+4b^4.$
48. $x^4+4x^3-11x^2+20x+25.$
49. $a^4+4a^3b-10a^2b^2+4ab^3+b^4.$

50. $x^4+8x^3+24x^2+32x-20$.

51. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$.

52. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-360$.

53. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$.

54. $x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b)$ হইলে,
$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

55. $x=a^2-b^2,\ y=b^2-c^2,\ z=a^2-c^2$ হইলে,
$(y-z)(y^2-z^2)-x\{(y-z)^2+x(y+z)\}+x^3$ এর মান নির্ণয় কর।

56. $x+y=4$ হইলে, $x^2-2(y-2)x-3y^2+20y-32$ এর মান নির্ণয় কর।

57. $x+y=25$ এবং $x-y=6$ হইলে, $x^2-y^2+4x+14y-45$ এর মান নির্ণয় কর।

58. $x+y=\sqrt{3}$ এবং $x-y=\sqrt{2}$ হইলে, $8xy(x^2+y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

II. অভেদাবলী (Identities)

149. পূর্ব্ববর্ণিত সূত্র ও নিয়মাবলীর সাহায্যে, ত্রয়োদশ অধ্যায়ে প্রদত্ত অভেদাবলী হইতে অপেক্ষাকৃত জটিলতর অথচ অত্যাবশ্যকীয়, অভেদাবলীর বিষয় আলোচনা করা যাইতেছে।

অভেদের সত্যতা প্রতিপন্ন করিতে হইলে, নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়ম কয়েকটি সর্ব্বদা মনে রাখা কর্ত্তব্য :

(i) কোন অভেদে, যে পক্ষ অপেক্ষাকৃত জটিল, সেই পক্ষকে সরল করিয়া অপর পক্ষের তুল্য করিতে হয়।

(ii) কোন অভেদে, উভয় পক্ষই জটিল হইলে, উভয় পক্ষকেই উহাদের লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত করিয়া উহাদের সমতা প্রতিপন্ন করিতে হয়।

(iii) কোন কোন ক্ষেত্রে, অভেদস্থিত কোন পদের পক্ষান্তরকরণ, বা উভয় পক্ষেই কতক পদ-সংযোগ, দ্বারা অভেদের সমতা প্রতিপন্ন করিতে হয়।

(iv) কোন কোন ক্ষেত্রে, অভেদের অন্তর্গত কতকগুলি পদের পরিবর্ত্তে একটি অক্ষর বসাইয়া অভেদের সমতা অতি সহজেই প্রতিপন্ন হইয়া থাকে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া পদ্ধতি দেখান যাইতেছে :

উদা. 1. প্রমাণ কর : $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)$
$+(x-c)(x-a)(c-a)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

$x-a$ এর পরিবর্তে p, $x-b$ এর পরিবর্তে q, এবং $x-c$ এর পরিবর্তে r বসাইলে, $q-p=a-b$, $r-q=b-c$, $p-r=c-a$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=pq(q-p)+qr(r-q)+rp(p-r)$

$$=-(q-p)(r-q)(p-r)$$

$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

[$q-p$, $r-q$, $p-r$ এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. প্রমাণ কর : $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$
$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$
$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$

$y+z$ এর পরিবর্তে a, $z+x$ এর পরিবর্তে b এবং $x+y$ এর পরিবর্তে c বসাইলে, $b+c=2x+y+z$, $c+a=x+2y+z$, $a+b=x+y+2z$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $x^3+6(y+z)x^2+12(y+z)^2x+8(y+z)^3$
$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2.$ [মাদ্রাজ, 1881.]

$\therefore$ বাম পক্ষ $=x^3+3x^2.\{2(y+z)\}+3.x.\{2(y+z)\}^2+\{2(y+z)\}^3$

$$=[x+2(y+z)]^3=(x+2y+2z)^3=\{2y+(x+2z)\}^3$$

$$=(2y)^3+3(2y)^2(x+2z)+3(2y)(x+2z)^2+(x+2z)^3$$

$$=8y^3+12y^2(x+2z)+6y(x+2z)^2+(x+2z)^3$$

$$=4y^2\{2y+3(x+2z)\}+\{6y+(x+2z)\}(x+2z)^2$$

$$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $x^3+y^3+z^3+24xyz=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2$
$+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}.$

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা দেখা যায় যে, ইহা নিম্নলিখিত অভেদের সমতুল্য :

$$3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$$
$$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3. \quad \ldots \quad (1)$$

এখন, $3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$

$$=3\{x(y^2-2yz+z^2)+y(z^2-2zx+x^2)+z(x^2-2xy+y^2)\}+24xyz$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)-2xyz-2yzx-2zxy+8xyz\}$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz\}$$

$$=3(y+z)(z+x)(x+y)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\ ;$$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া, $x^3+y^3+z^3+24xyz$

$$=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $-x(b-c)(c-a)(a-b)$

$$=a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b).$$

ডা'নদিকের প্রথম রাশি $=a(b-c)\{x^2-x(b+c)+bc\}$

$$=x^2a(b-c)-xa(b^2-c^2)+abc(b-c).$$

ডা'নদিকের দ্বিতীয় রাশি $=b(c-a)\{x^2-x(c+a)+ca\}$

$$=x^2b(c-a)-xb(c^2-a^2)+abc(c-a).$$

ডা'নদিকের তৃতীয় রাশি $=c(a-b)\{x^2-x(a+b)+ab\}$

$$=x^2c(a-b)-xc(a^2-b^2)+abc(a-b).$$

$\therefore$ ডা'ন পক্ষ [উল্লম্বভাবে (vertically) যোগ করিয়া]

$$=x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$

$$=x^2.0-x\{(b-c)(c-a)(a-b)\}+abc.0,$$

[সূত্র XXII, XIV এবং XXIII, নিয়ম 133]

$$=-x(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz).$$

বাম পক্ষ $=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-\dfrac{(xyz+x^2)}{x}\cdot\dfrac{(xyz+y^2)}{y}\cdot\dfrac{(xyz+z^2)}{z}$

$$=\{1-(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2\}-\frac{1}{xyz}\{(xyz)^3+(xyz)^2(x^2+y^2+z^2)+(xyz)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+x^2y^2z^2\}$$

$$=(1-x^2-y^2-z^2)+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-x^2y^2z^2-x^2y^2z^2$$
$$-xyz(x^2+y^2+z^2)-(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-xyz$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2)-xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=1-x^2-y^2-z^2-2xyz+xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)+xyz(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)$$
$$=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz).$$

150. সাপেক্ষ অভেদ (Conditional Identities) : এখন আমরা কতকগুলি আবশ্যকীয় সাপেক্ষ অভেদ প্রতিপন্ন করিয়া, উহা হইতে আরও কতকগুলি অভেদের সত্যতা সাব্যস্ত করিব।

151. $\boldsymbol{a+b+c=0}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(1) $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)}$.

এখন, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab,$

$$\therefore \quad 0^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab).$$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া, $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab).$

(2) $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=3abc}$.

এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0,$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $a^3+b^3+c^3=3abc.$ [99 নিয়মের উদা. 10 দেখ।]

(3) $\boldsymbol{(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2}$.

এখন, $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc\times 0$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$$

আবার, উপরিপ্রদর্শিত (1) হইতে, $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$

$$\therefore \quad (bc+ca+ab)^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

কাজেই, $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$

(4) $\boldsymbol{a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}$
$\boldsymbol{=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2}$.

এখন, $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$=0\times(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$, [নিয়ম 142]

$=0$.

কাজেই, পক্ষান্তর করিয়া,

$a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$. [(3) হইতে]

(5) $\boldsymbol{a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)}$

$\boldsymbol{=\frac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2)}$

$\boldsymbol{=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)}$.

যেহেতু, $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া $a+b=-c$,

$\therefore\ (a+b)^5=(-c)^5$,

অথবা, $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5$. [নিয়ম 127]

পক্ষান্তর করিয়া, $a^5+b^5+c^5$

$=-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4$

$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$, [গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া]

$=-5ab(-c)\{(a+b)^2-ab\}$, [$\because\ a+b=-c$]

$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=5abc(-ac-bc-ab)$

$=-5abc(bc+ca+ab)=\frac{5abc}{2}(a^2+b^2+c^2)$ [(1) দ্বারা]

$=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2).3abc$

$=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$, [যেহেতু, $a^3+b^3+c^3=3abc$]

(6) $\boldsymbol{a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2}$

$\boldsymbol{=\frac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3)}$.

যেহেতু, $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া $a+b=-c$,

$\therefore\ (a+b)^7=(-c)^7$,

অথবা, $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

$=-c^7$. [নিয়ম 127]

পক্ষান্তর করিয়া, $a^7+b^7+c^7$

$= -7a^6b-21a^5b^2-35a^4b^3-35a^3b^4-21a^2b^5-7ab^6$

$= -7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)$

$= -7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)$ [বিশ্লেষণ করিয়া]

$= -7ab(-c)(a^2+ab+b^2)^2 = 7abc(a^2+ab+b^2)^2$

$= 7abc(bc+ca+ab)^2$ [(5) এর নিয়মানুসারে]

$= \frac{7}{3}(bc+ca+ab)^2.3abc$

$= \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2.(a^3+b^3+c^3)$ [(2) এবং (3) হইতে]

$= \frac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3).$

উদা. 1. প্রমাণ কর : $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

$= 3(y-z)(z-x)(x-y).$

$y-z$ এর পরিবর্তে a, $z-x$ এর পরিবর্তে b এবং $x-y$ এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$a+b+c=y-z+z-x+x-y=0.$

$\therefore \quad a^3+b^3+c^3=3abc.$ [(3) হইতে]

অথবা, $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y).$

[a, b, c এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. প্রমাণ কর : $\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}$

$= \frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}\cdot\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}.$

$y-z$ এর পরিবর্তে a, $z-x$ এর পরিবর্তে b এবং $x-y$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া,

$a+b+c=y-z+z-x+x-y=0$;

$\therefore \quad a^5+b^5+c^5=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3),$

অথবা, $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$

$\therefore$ a, b, c এর মান বসাইয়া,

$\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}=\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}$

$\times\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}.$

উদা. 3. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3$
$+(x+y-z)^3=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

$y+z-x$ এর পরিবর্তে a, $z+x-y$ এর পরিবর্তে b, $x+y-z$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া, $a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z=0.$

কাজেই, $a^3+b^3+c^3=3abc.$

$\therefore$ a, b, c এর মান বসাইয়া, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

আবার, যেহেতু $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$a=-(b+c)=-\{(z+x-y)+(x+y-z)\}=-2x,$$
$$b=-(c+a)=-\{(x+y-z)+(y+z-x)\}=-2y,$$
$$c=-(a+b)=-\{(y+z-x)+(z+x-y)\}=-2z.$$

$\therefore$ $3abc=3(-2x)(-2y)(-2z)=-24xyz$;

অতএব, $3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

কাজেই, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

উদা. 4. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ হইলে, দেখাও যে,
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

এখন, $x+y+z=a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab$
$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$;

$y-z=(b^2-ca)-(c^2-ab)$
$=b^2-c^2+ab-ca$
$=(b-c)(b+c)+a(b-c)$
$=(b-c)\{(b+c)+a\}$
$=(b-c)(a+b+c).$

তদ্রূপ, $z-x=(c-a)(a+b+c)$, এবং $x-y=(a-b)(a+b+c).$

এখন, $x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$
$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{(b-c)^2(a+b+c)^2$
$+(c-a)^2(a+b+c)^2+(a-b)^2(a+b+c)^2\}$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$\times \tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}(a+b+c)^2$$
$$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$$
$$=\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\}^2$$
$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

উদা. 5. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)$$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$$

বাম পক্ষের দুই পদের সমষ্টি $=s(s-2c)\{(s-2b)+(s-2a)\}$
$$=s(s-2c)\{2s-2(a+b)\}$$
$$=s(s-2c)\times 2c\,;$$

এবং তৃতীয় পদ $=(s-2c+2c)(s-2a)(s-2b)$
$$=(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b),$$

কাজেই, বাম পক্ষ $=s(s-2c)2c+\{(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b)\}$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+2c\{s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)\}.$$

কিন্তু, $s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)=(s^2-2cs)+\{s^2-2s(a+b)+4ab\}$
$$=2s^2-2s(a+b+c)+4ab$$
$$=2s^2-2s.s+4ab$$
$$=4ab.$$

∴ বাম পক্ষ $=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$

6. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)(s-b)(s-c)=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

বাম পক্ষ $=s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc$
$$=s^3-s.s^2+(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc$$
$$=(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc.$$

উদা. 7. $a+b+c+d=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a+b)(a+c)(a+d)=(b+a)(b+d)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

যেহেতু, $a+b+c+d=0$,

অতএব, $\left.\begin{aligned} a+b &= -(c+d), \\ a+c &= -(b+d), \\ a+d &= -(b+c); \end{aligned}\right\}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$$\therefore \quad (a+b)(a+c)(a+d)=(a+b)\{-(b+d)\}\{-(b+c)\}$$
$$=(a+b)(b+d)(b+c)$$
$$=(b+a)(b+d)(b+c).$$

এইরূপে, $(a+b)(a+c)(a+d)=\{-(c+d)\}(a+c)\{-(b+c)\}$
$$=(c+d)(a+c)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b);$$

এবং, $(a+b)(a+c)(a+d)=-(c+d)\{-(b+d)\}(a+d)$
$$=(c+d)(b+d)(a+d)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

উদা. 8. প্রমাণ কর : $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz$
$=(2x+y-z)^3+(y+z)^3-(x+y-z)^3-6x(x-2z)(x+y).$

$2x+y-z$ এর পরিবর্তে a, $y+z$ এর পরিবর্তে b এবং $-(x+y-z)$ এর পরিবর্তে c বসাইলে, $a+b+c=x+y+z$,
$$b+c=2z-x,$$
$$c+a=x,$$
$$a+b=2(x+y);$$

$\therefore$ ডা'ন পক্ষ (right side)
$$=(2x+y-z)^3+(y+z)^3+\{-(x+y-z)\}^3+3.x(2z-x).2(x+y)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(c+a)(b+c)(a+b)$$
$$=(a+b+c)^3$$
$$=(x+y+z)^3$$
$$=\{(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)\}^3,$$

[যেহেতু, $(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z$]

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3\{(z+x-y)$$
$$+(x+y-z)\}\{(x+y-z)+(y+z-x)\}\{(y+z-x)+(z+x-y)\}$$

[সূত্র XVII, নিয়ম 133]

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$$
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

প্রশ্নমালা 81

প্রমাণ কর :

1. $a^2x + b^2y + c^2z = (x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$,
যদি $x^2 - yz = a^2$, $y^2 - zx = b^2$ এবং $z^2 - xy = c^2$ হয়।

2. $ax + by + cz = (a+b+c)(x+y+z)$,
যদি $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয়।

3. $(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b)$
$+ (b-c)(c-a)(a-b) = 0.$

4. $27(a+b+c)^3 - (a+2b)^3 - (b+2c)^3 - (c+2a)^3$
$= 3(a+3b+2c)(b+3c+2a)(c+3a+2b).$

5. $2(s-a)(s-b)(s-c) + a(s-b)(s-c) + b(s-c)(s-a)$
$+ c(s-a)(s-b) = abc$, যদি $2s = a+b+c$ হয়।

6. $s(s-a)(s-b) + s(s-a)(s-c) + s(s+a)(s-c) + c(s+a)(s+b)$
$= (s+a)(s+b)(s+c)$, যদি $s = a+b+c$ হয়।

7. $(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 - 3(s-a)(s-b)(s-c)$
$= \frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$, যদি $2s = a+b+c$ হয়।

8. $(3x+2y+5z)^3 - (3x+2y-5z)^3 - 30z\{(3x+2y)^2 - 25z^2\}$
$= (20x-y+8z)^3 + (y+2z-20x)^3 + 30z(20x-y+8z)(y+2z-20x).$

9. $(x+y+2z)(x+2y+z)(2x+y+z) - (y+z)(z+x)(x+y)$
$= 2(x+y+z)^3 + 2xyz.$

10. $(a+b+c)(x+y+z) + (a+b-c)(x+y-z) + (b+c-a)(y+z-x)$
$+ (c+a-b)(z+x-y) = 4(ax+by+cz).$

11. $(y-z)(1+xy)(1+xz) + (z-x)(1+yz)(1+yx)$
$+ (x-y)(1+zx)(1+yz) = (y-z)(z-x)(x-y).$

12. $(x-1)(x^2+x+4)(y-z) + (y-1)(y^2+y+4)(z-x)$
$+ (z-1)(z^2+z+4)(x-y) = -(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$

13. $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + 3(y+z)(z+x)(x+y) = 0$,
যদি $x+y+z+w = 0$ হয়।

14. $\frac{(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5}{5} \cdot \frac{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}{2}$
$= \frac{(b-c)^7 + (c-a)^7 + (a-b)^7}{7}.$

15. $(x+y)(x+z)(x^2-yz)=(x+y+z)(x-z)(x^2+y^2)$,
যদি $x=a^3+a^2$, $y=a^2+a$ এবং $z=a+1$ হয়। [মাঃ 1909.]

16. $(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)+(x+y-2z)\times$
$(y+z-2x)=3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}$.

17. $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$.

18. $(b-c)(b+c-2a)^3+(c-a)(c+a-2b)^3+(a-b)(a+b-2c)^3=0$.

19. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3=3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$.

20. $a^6(b^2-c^2)^3+b^6(c^2-a^2)^3+c^6(a^2-b^2)^3$
$=3a^2b^2c^2(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

21. $(b+c)(b-c)^3+(c+a)(c-a)^3+(a+b)(a-b)^3$
$=2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

22. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

23. $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2=27a^2b^2(a+b)^2$.

24. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$,
যদি $2s=a+b+c$ হয়।

25. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$, যদি $2s=a+b+c$ হয়।

26. $\dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{3}\cdot\dfrac{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7}{7}$
$=\left\{\dfrac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}\right\}^2$.

27. $(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2-\{(bx+cy+az)$
$\times(cx+ay+bz)+(cx+ay+bz)(ax+by+cz)+(ax+by+cz)(bx+cy+az)\}$
$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

28. $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

$a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

29. $ca-b^2=ab-c^2=bc-a^2=bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

30. $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2=-(bc+ca+ab)$.

31. $a(c+a)(a+b)=b(a+b)(b+c)=c(a+c)(b+c)=abc$.

32. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=3abc$.

33. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

34. $X = ax + by + cz$, $Y = bx + cy + az$ এবং $Z = cx + ay + bz$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3XYZ$.

35. $(2a + b + c)^3 + (a + 2b + c)^3 + (a + b + 2c)^3$
$= 3(2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c)$.

36. প্রমাণ কর যে, $(3x + y + z)^3 + (x + 3y + z)^3 + (x + y + 3z)^3$
$- 3(3x + y + z)(x + 3y + z)(x + y + 3z) = 20(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

37. $a + b + c = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a + bc)(b + c) = (b + ca)(c + a) = (c + ab)(a + b) = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

প্রমাণ কর যে,

38. $(x + y)^2(y + z - x)(z + x - y) + (x - y)^2(x + y + z)(x + y - z)$
$= 4xyz^2 + (y^2 - z^2)(y^4 + y^2z^2 + z^4) + (z^2 - x^2)(z^4 + z^2x^2 + x^4)$
$+ (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$.

39. $2x(y + z - x) + (z + x - y)(x + y - z)$
$= 2y(z + x - y) + (x + y - z)(y + z - x)$
$= 2z(x + y - z) + (y + z - x)(z + x - y)$
$= (y + z - x)(z + x - y) + (z + x - y)(x + y - z)$
$+ (x + y - z)(y + z - x)$.

40. $x^3 + y^3 + z^3 = a^3 - 3ab + 3c$,
যদি $x + y + z = a$, $yz + zx + xy = b$, $xyz = c$ হয়।

41. $yz(y + x) + zx(z + x) + xy(x + y) + 3xyz = \frac{1}{2}(p^3 - pq^2)$,
যদি $x + y + z = p$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = q^2$ হয়।

42. $x^7 + y^7 + z^7 = 7qr^2$,
যদি $x + y = -z$, $xyz = q$ এবং $yz + zx + xy = r$ হয়।

43. $x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}q^4$,
যদি $x^2 + y^2 + z^2 = q^2$, $x + y = 13$, $z = -13$ হয়।

44. $(x + y + z)(yz + zx + xy) - (y + z)(z + x)(x + y) = 120$,
যদি $yz = 45$, $zx = 64$, $xy = 5$ হয়।

ত্রয়োবিংশ অধ্যায়

ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem)

ও

বিভাজ্যতা (Divisibility)

152. ভাগ বিষয়ক আবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা (Important Theorem in Division) :

প্রতিজ্ঞা 1. px^2+qx+r কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (অর্থাৎ যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না সেইটি) pa^2+qa+r হইবে।

এখন,

$$\begin{array}{l} x-a\,)\,px^2+qx+r\,(\,px+(ap+q) \\ \quad\quad\;\; \underline{px^2-apx} \\ \quad\quad\;\; (ap+q)x+r \\ \quad\quad\;\; \underline{(ap+q)x-a(ap+q)} \\ \quad\quad\quad\quad a(ap+q)+r \end{array}$$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ $=a(ap+q)+r=pa^2+qa+r.$

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, উপরোক্ত ভাগশেষ এবং প্রদত্ত ভাজ্য উভয় একই আকারের ; এবং, ভাজ্যে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই ভাগশেষ পাওয়া যায়।

প্রতিজ্ঞা 2. px^3+qx^2+rx+s কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না, সেইটি pa^3+qa^2+ra+s হইবে।

এখন,

$$\begin{array}{l} x-a\,)\,px^3+qx^2+rx+s\,(\,px^2+(ap+q)x+(pa^2+qa+r) \\ \quad\quad\;\; \underline{px^3-apx^2} \\ \quad\quad\;\; (ap+q)x^2+rx+s \\ \quad\quad\;\; \underline{(ap+q)x^2-a(ap+q)x} \\ \quad\quad\;\; (pa^2+qa+r)x+s \\ \quad\quad\;\; \underline{(pa^2+qa+r)x-a(pa^2+qa+r)} \\ \quad\quad\quad\quad a(pa^2+qa+r)+s \end{array}$$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ $=pa^3+qa^2+ra+s.$

টীকা। এক্ষেত্রেও দেখা যায় যে, ভাজ্যে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বর্জ্জিত ভাগশেষ পাওয়া যায়।

উদা. 1. x^3-5x^2+6x+9 কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

প্রতিজ্ঞা 2 অনুসারে, নির্ণেয় ভাগশেষ $=2^3-5.2^2+6.2+9$
$=8-20+12+9=9.$

উদা. 2. x^3-216 কে $x-6$ দ্বারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ভাগশেষ $=6^3-216=216-216=0.$

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা উপরোক্ত ফলগুলি প্রত্যক্ষ করা কর্ত্তব্য।

153. মূলদ (Rational) ও অখণ্ড বা পূর্ণ রাশিমালা (Integral Expressions):

$p, q, r, \cdots\cdots l, m$ প্রত্যেকেই ধ্রুবক (constant) এবং n একটি অখণ্ড ধনরাশি (positive integer) হইলে, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ রাশিমালাকে x এর **মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালা** (rational and integral expression) বলে। যথা, $x^2-3x+13$, x^3+px+r, প্রভৃতি রাশিমালাসমূহের প্রত্যেকেই x এর মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালা।

এক্ষণে, উপরোক্ত মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালার সাহায্যে ভাগশেষ সম্বন্ধীয় সাধারণ প্রতিজ্ঞাটি (General Remainder Theorem) প্রতিপন্ন করা যাইতেছে।

154. ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem):

x এর কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (the remainder independent of x) পাওয়া যায়।

ধর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে Q দ্বারা এবং x-বর্জ্জিত ভাগশেষটিকে R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

যেহেতু, সকল ক্ষেত্রেই, ভাজ্য $\equiv$ (ভাজক) $\times$ (ভাগফল) $+$ ভাগশেষ,

অতএব, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m\equiv(x-a).Q+R$, একটি অভেদ।

এখন, যেহেতু ভাগশেষ, R, এর ভিতর x নাই, অতএব, x এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরোক্ত অভেদটিতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে,

$$pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m = (a-a).Q' + R,$$

[$x = a$ হইলে Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

$$= 0 \times Q' + R$$

$$= R.$$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ, অর্থাৎ $R, = pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m.$

কাজেই দেখা যায় যে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই নির্ণেয় x-বর্জ্জিত ভাগশেষ পাওয়া যায়।

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি.। কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাকে $x + a$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে '$-a$' বসাইলেই পাওয়া যায়।

[যেহেতু, $x + a = x - (-a)$, কাজেই, এই সিদ্ধান্তের সত্যতা ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই প্রমাণিত হইতে পারে।]

উদা. 1. $x^2 - 5x + 9$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করিয়া, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি নির্ণয় কর।

উপরোক্ত অনুসিদ্ধান্ত হইতে,

নির্ণেয় ভাগশেষ $= (-2)^2 - 5.(-2) + 9 = 4 + 10 + 9 = 23.$

উদা. 2. $x^2 + px + q$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করিয়া, x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

উপরোক্ত অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে,

নির্ণেয় ভাগশেষ $= (-a)^2 + p(-a) + q$

$$= a^2 - pa + q.$$

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা এই ফলগুলি প্রত্যক্ষ করা উচিত।

উদা. 3. $x = 15$ হইলে, $x^6 - 19x^5 + 69x^4 - 151x^3 + 229x^2 + 166x + 26$ এর মান কত ?

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা অনুসারে,

নির্ণেয় মান = প্রদত্ত রাশিমালাকে $x - 15$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগশেষ ;

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা

$$= x^6 - 15x^5 - (4x^5 - 60x^4) + (9x^4 - 135x^3) - (16x^3 - 240x^2) - (11x^2 - 165x) + (x - 15) + 41$$
$$= x^5(x-15) - 4x^4(x-15) + 9x^3(x-15) - 16x^2(x-15) - 11x(x-15) + (x-15) + 41.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাকে $x - 15$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 41 হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 41$.

155. বিভাজ্যতা (Divisibility) ও গুণনীয়ক সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Factor Theorem) : যদি x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে a বসাইলে রাশিমালার মান 0 (শূন্য) হয়, তবে ঐ রাশিমালা $x - a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ; এবং $x - a$ উহার এক গুণনীয়ক।

ধর, $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m$ প্রদত্ত রাশিমালা।

ইহাকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করিলে,

ভাগশেষ = ঐ রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে a বসাইয়া লব্ধমান [ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা]

$$= pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m.$$

অতএব, যদি এই ভাগশেষ, অর্থাৎ $pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m = 0$ হয়, তবে, প্রদত্ত রাশিমালা $x - a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

আবার যেহেতু, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$$= (x-a) \times Q + (pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m) \quad [Q \equiv \text{ভাগফল}]$$
$$= (x-a).Q, \text{ যদি } pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m = 0 \text{ হয় ;}$$

কাজেই, $pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m = 0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার, অর্থাৎ $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots + lx + m$ এর, এক গুণনীয়ক $x - a$ হইবে।

অনুসি.। $p(-a)^n + q(-a)^{n-1} + r(-a)^{n-2} + \cdots\cdots + la + m = 0$ হইলে, $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots + lx + m$ এর, এক গুণনীয়ক $x + a$ হইবে।

[যেহেতু, $x + a = x - (-a)$, কাজেই মূল প্রতিজ্ঞা হইতে অনুসিদ্ধান্তের সত্যতা সহজেই অনুমেয়।]

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $3x^3-2x^2+x-18$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য এবং $x-2$ প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক হইবে।

$x=2$ বসাইয়া রাশিমালার মান $=3.2^3-2.2^2+2-18=24-8+2-18=0.$ অতএব, উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে দেখা যায় যে, $3x^3-2x^2+x-18$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং $x-2$ প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক।

উদা. 2. দেখাও যে, $3x^3-2x^2y-13xy^2+10y^3$ রাশিমালা $x-2y$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালাতে $x=2y$ বসাইলে,

$$\text{উহার মান}=3(2y)^3-2(2y)^2.y-13(2y).y^2+10y^3$$
$$=24y^3-8y^3-26y^3+10y^3=0.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $x-2y$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং $x-2y$ উহার এক গুণনীয়ক।

উদা. 3. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+lx+m$ রাশিমালা $x-1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

প্রদত্ত রাশিমালাতে $x=1$ বসাইলে,

$$\text{উহার মান}=a.1^n+b.1^{n-1}+c.1^{n-2}+\cdots+l.1+m$$
$$=a+b+c+\cdots+l+m$$

[কারণ, $1^n=1\times1\times1\times\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $=1$;
তদ্রূপ, $1^{n-1}=1^{n-2}=\cdots=1.$]

$\therefore$ যদি $a+b+c+\cdots+l+m=0$ হয়,

অর্থাৎ, যদি প্রদত্ত রাশিমালার সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টির মান 0 হয়, তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশিমালা $x-1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

উদা. 4. দেখাও যে, x^3+4x^2+5x+6 এর এক গুণনীয়ক $x+3$ হইবে।

$$x+3=x-(-3).$$

$x=-3$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার মান $=(-3)^3+4.(-3)^2+5.(-3)+6$
$$=-27+36-15+6=0.$$

কাজেই, উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $x+3$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং $x+3$ উহার এক গুণনীয়ক হইবে।

উদা. 5. p এর মান কত হইলে, x^3+3x^2+4x+p এর এক গুণনীয়ক $x+6$ হইবে ?

$$x+6=x-(-6).$$

$x=-6$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার মান $=(-6)^3+3.(-6)^2+4.(-6)+p$
$$=-216+108-24+p$$
$$=p-132.$$

উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে দেখা যায় যে, $p-132=0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক $x+6$ হইবে ;

$\therefore$ p এর নির্ণেয় মান $=132$.

উদা. 6. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, x^2+3x+p এবং x^2+4x+q, এই দুই রাশিমালারই এক গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে ?

ধর, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের এক গুণনীয়ক সাধারণ আছে, এবং উহা $x-a$.

এখন, $x=a$ হইলে, x^2+3x+p এর মান $=a^2+3a+p=0$; ... (1)
[কারণ, $x-a$ এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

আবার, $x=a$ হইলে, x^2+4x+q এর মান $=a^2+4a+q=0$; ... (2)
[কারণ, $x-a$ এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

অতএব, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$(a^2+4a+q)-(a^2+3a+p)=0 ;$$

অথবা, $a+q-p=0$;

অথবা, $a=p-q$. [পক্ষান্তর করিয়া]

a এর এই লব্ধ মান (1) তে বসাইলে,

$$(p-q)^2+3(p-q)+p=0 ;$$

অথবা, $p^2-2pq+q^2+3p-3q+p=0$;

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত্ত এই যে, $p^2-2pq+q^2+4p-3q=0$ হইবে।

156. বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় আবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা (Some important Theorems on Divisibility) :

দশম অধ্যায়ে, a^n+b^n এবং a^n-b^n এর $a+b$ ও $a-b$ দ্বারা বিভাজ্যতা সম্পর্কীয় কয়েকটি বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্র সম্বন্ধে উল্লেখ করা হইয়াছে। এক্ষণে, সাধারণ-ভাবে ঐ সম্পর্কে আলোচনা করা যাইতেছে।

প্রতিজ্ঞা 1. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশিই হউক না কেন, $a^n - b^n$ সকল সময়েই $a - b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

ধর, $a^n - b^n$ কে $a - b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R পাওয়া গেল। তাহা হইলে,

যেহেতু, ভাজ্য $\equiv$(ভাজক) $\times$ (ভাগফল) + (ভাগশেষ),

অতএব, $a^n - b^n \equiv Q \times (a - b) + R$, একটি অভেদ।

এখন, R এর মধ্যে a অক্ষরটি না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

মনে কর, উপরোক্ত অভেদটিতে, a এর পরিবর্ত্তে b বসান হইল।

তাহা হইলে, $b^n - b^n = Q' \times (b - b) + R$, [$a = b$ হইলে, Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

অথবা, $0 = Q' \times 0 + R$;

$\therefore \quad R = 0.$

সুতরাং, ভাগশেষ 0 হওয়ায়, $a^n - b^n$ রাশিটি $a - b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যাইবে যে,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

উদা.। $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a - b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রতিজ্ঞা 2. n একটি **যুগ্ম** ধনরাশি হইলে, $a^n - b^n$ রাশিমালা $a + b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু, n **অযুগ্ম** হইলে, ঐরূপ হইবে না।

ধর, $a^n - b^n$ কে $a + b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Q দ্বারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে অবশ্যই,

$$a^n - b^n \equiv Q \times (a + b) + R, \text{ একটি অভেদ।}$$

এখন, R এর ভিতর a না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। মনে কর, উপরোক্ত অভেদে a এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসান হইল। তাহা হইলে,

$(-b)^n - b^n = Q' \times (-b + b) + R$, [$a = -b$ হইলে, Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

$= Q' \times 0 + R = R$;

এখন, n যুগ্ম হইলে, $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$;

এবং n অযুগ্ম হইলে, $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$;

$\therefore$ n যুগ্ম হইলে, ভাগশেষ, অর্থাৎ R, $=0$;

এবং n অযুগ্ম হইলে, R, অর্থাৎ ভাগশেষ, $= -2b^n$; কাজেই শূন্য নয়।

সুতরাং, n যুগ্ম হইলে, $a^n - b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে, তদ্রূপ হইবে না।

n যুগ্ম হইলে, প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যায় যে,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots\cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

উদা.। $a^2 - b^2$, $a^4 - b^4$, $a^6 - b^6$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু, $a^3 - b^3$, $a^5 - b^5$, $a^7 - b^7$ প্রভৃতির কোনটিই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

প্রতিজ্ঞা 3. n একটি **অযুগ্ম** অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $a^n + b^n$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n **যুগ্ম** হইলে, ঐরূপ হইবে না।

ধর, $a^n + b^n$ কে $a+b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q দ্বারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে, অবশ্যই

$$a^n + b^n = (a+b) \times Q + R, \text{ একটি অভেদ।}$$

যেহেতু R এর ভিতর a নাই, অতএব উপরোক্ত অভেদে a এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই বসান যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, a এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসাইয়া

$\therefore$ $(-b)^n + b^n = Q' \times (-b+b) + R = Q' \times 0 + R = R$. [$a$ এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা সূচিত করা হইতেছে।]

এখন, n অযুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $(-b)^n + b^n = -b^n + b^n = 0$;

কিন্তু n যুগ্ম হইলে, $(-b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$, (শূন্য নয়)।

কাজেই, n অযুগ্ম হইলে R এর মান শূন্য হইবে ; n যুগ্ম হইলে, R শূন্য হইবে না।

সুতরাং, n অযুগ্ম হইলে, $a^n + b^n$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n যুগ্ম হইলে, ঐরূপ হইবে না।

বস্তুতঃ, n অযুগ্ম হইলে, প্রকৃত ভাগ দ্বারা,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

উদা. $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$, $a^7 + b^7$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু, $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, $a^6 + b^6$,.... প্রভৃতির কোনটিই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

প্রতিজ্ঞা 4. n **যুগ্মই** হউক, বা **অযুগ্মই** হউক, a^n+b^n কোন সময়ই $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে না।

ধর, a^n+b^n কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Q দ্বারা এবং ভাগশেষ R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

$$a^n+b^n=Q\times(a-b)+R,$$ একটি অভেদ।

যেহেতু R এর ভিতর a নাই, অতএব a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরোক্ত অভেদে $a=b$ বসাইলে, $b^n+b^n=Q'\times(b-b)+R=Q'\times 0+R=R$; [$a$ এর পরিবর্ত্তে b বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা সূচিত করা হইতেছে]

অথবা, $R=2b^n$.

যেহেতু, n এর কোন মানের জন্যই R এর মান শূন্য হয় না, কাজেই, a^n+b^n কোন সময়ই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদা.। a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4 প্রভৃতির কোনটিই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদা. 1. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $3^{4n}-4^{3n}$ রাশিমালা 17 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এখন, $3^{4n}-4^{3n}=(3^4)^n-(4^3)^n=(81)^n-(64)^n$.

কাজেই প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশিটি $81-64$ অর্থাৎ 17 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

উদা. 2. n একটি যুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $2^{6n}-6^{2n}$ রাশিটির শেষের অঙ্ক দুইটির প্রত্যেকে 0 হইবে।

প্রদত্ত রাশি $=(2^6)^n-(6^2)^n=(64)^n-(36)^n$.

এখন, যেহেতু, n একটি যুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি, অতএব, দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশি, $64+36$ অর্থাৎ 100 দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

যেহেতু, প্রদত্ত রাশিটির এক উৎপাদক 100 হইবে, অতএব, উহার শেষ অঙ্ক দুইটি 0 হইবে।

উদা. 3. m অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)^{2m+1}+(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)^{2m+1}$ এর একটি উৎপাদক $2x$ হইবে।

প্রদত্ত রাশি $=\{(x+a)^3\}^{2m+1}+\{((x-a)^3\}^{2m+1}$
$=(x+a)^{3(2m+1)}+(x-a)^{3(2m+1)}$

যেহেতু, $3(2m+1)$ একটি অযুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি, অতএব প্রদত্ত রাশি, $(x+a)+(x-a)$, অর্থাৎ $2x$, দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। সুতরাং, $2x$, প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

উদা. 4. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে,
দেখাও যে, $(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ রাশিমালা $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

প্রদত্ত রাশিমালা a, b, c অক্ষরবিশিষ্ট একটি মূলদ (rational) ও পূর্ণ রাশিমালা (integral expression) ; ইহাতে c এর পরিবর্তে b বসাইলে,

$$\text{রাশিমালার মান} = (c-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-c)^{2n+1}$$
$$= (0)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1}+\{-(c-a)\}^{2n+1}.$$

এখন, $\{-(c-a)\}^{2n+1}$
$= \{-1\times(c-a)\}\times\{-1\times(c-a)\}\times \ldots\ldots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত
$= \{(-1)\times(-1)\times(-1)\times\ldots\ldots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত$\}$
$\times\{(c-a)\times(c-a)\times(c-a)\times\ldots\ldots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত$\}$
$= -1\times(c-a)^{2n+1} = -(c-a)^{2n+1}$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=0$.

কাজেই, 155 নিয়ম অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $b-c$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। এইরূপে, c এর পরিবর্তে a বসাইয়া দেখান যাইবে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ দ্বারা বিভাজ্য ; এবং a এর পরিবর্তে b বসাইয়া দেখান যাইবে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

কাজেই, প্রদত্ত রাশিমালা $(b-c)(c-a)(a-b)$ এই গুণফল দ্বারাও সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 5. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ রাশিমালা $ab-bc+cd-da$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। [মাদ্রাজ, 1873.]

স্পষ্টতঃ, $ab-bc+cd-da=b(a-c)+d(c-a)=(c-a)(d-b)$.

এখন, প্রদত্ত রাশিমালাতে c এর পরিবর্তে a বসাইলে,

$$\text{উহার মান} = (ab)^n-(ba)^n+(ad)^n-(da)^n$$
$$=(ab)^n-(ab)^n+(ad)^n-(ad)^n=0.$$

কাজেই, নিয়ম 155 অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। তদ্রূপ, d এর পরিবর্তে b বসাইয়া দেখান যাইতে পারে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $d-b$ দ্বারাও বিভাজ্য। সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ এবং $d-b$ এর গুণফল, অর্থাৎ $(c-a)\times(d-b)$, অর্থাৎ $ab-bc+cd-da$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 6. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $x^{n+1}-x^n-x+1$ রাশিমালা $(x-1)^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^{n+1}-x^n-x+1=x^n(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^n-1)$; কাজেই, $x-1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

এখন যেহেতু, 156 নিয়মের প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, x^n-1 রাশিটিও $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য, কাজেই প্রদত্ত রাশিমালা $(x-1)\times(x-1)$ অর্থাৎ $(x-1)^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 7. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক গুণফলটি (continued product) নির্ণয় কর:

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8);$$

ধর, নির্ণেয় ধারাবাহিক গুণফল A দ্বারা সূচিত হইতেছে।

তাহা হইলে, $A=(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$;

উভয় পক্ষকে $x-a$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$\begin{aligned}A.(x-a)&=\{(x-a)(x+a)\}(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\&=\{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\&=\{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\}(x^8+a^8)\\&=(x^8-a^8)(x^8+a^8)=x^{16}-a^{16}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad A=\frac{x^{16}-a^{16}}{x-a}=x^{15}+x^{14}a+x^{13}a^2+x^{12}a^3+\cdots\cdots+xa^{14}+a^{15}.$$

উদা. 8. $x+a$ রাশিটি x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$.

যেহেতু, x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x+a$, অতএব উভয় রাশিমালাই $x+a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

অতএব, 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' অনুসারে,

$(-a)^2+p(-a)+q=0$, অর্থাৎ, $a^2-pa+q=0$;

এবং $(-a)^2-p'(-a)+q'=0$, অর্থাৎ, $a^2-p'a+q'=0$;

অতএব, $(a^2 - p'a + q') - (a^2 - pa + q) = 0$;

অথবা, $a(p - p') + q' - q = 0$;

পক্ষান্তর করিয়া, $a(p - p') = q - q'$; $\therefore\ a = \dfrac{q - q'}{p - p'}$.

প্রশ্নমালা 82

প্রকৃত ভাগ করিয়া ভাগশেষ নির্ণয় কর :

1. $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x - 3)$.

2. $(3x^9 + 5x^7 + 11) \div (x + 1)$. **3.** $(3x^3 + 7x^2 + 11x + 2) \div (3x - 1)$.

4. $(4x^3 + 5x^2 + 9x + 7) \div (2x + 3)$.

5. $(ax^3 + bx^2 + cx + d) \div (ax + b)$.

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে দেখাও যে, **প্রথমোক্ত** রাশিটি **শেষোক্ত** রাশিটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য :

6. $6x^3 + 13x^2 + 17x + 6$; $2x + 1$.

7. $apx^3 + (2p + aq)x^2 + (2q + ar)x + 2r$; $ax + 2$.

8. $6x^4 + 13x^3y + 18x^2y^2 + 23xy^3 + 10y^4$; $3x + 2y$.

9. $a^{57} + b^{57}$; $a + b$. **10.** $64x^6 - 729y^6$; $2x + 3y$.

11. $x^{2n} - y^{2n}$; $x + y$ [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি]।

12. $x^{12}y^8 - x^8y^{12}$; $x^2y^2(x - y)$.

13. $(3a + 2b)^{2n+1} + b^{2n+1}$; $a + b$ [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি]।

14. $x^{2n+1} - ax^{2n} - xa^{2n} + a^{2n+1}$; $(x - a)^2$.

15. $64 + 32x + 2x^5 + x^6$; $x^2 + 4x + 4$.

16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, $x^7 + 9x^4 - 7x^3 + 11ax + 5a^2$ এর এক গুণনীয়ক $x + 1$ হইবে ?

17. a এর মান কত হইলে, $3x^5 + 9x^4 - 7x^3 - 5x^2 - 4ax + 3a^2$ এর এক গুণনীয়ক $x - 1$ হইবে ?

18. m এর মান কত হইলে, $a^n + x^n$ এবং $a^n - x^n$ [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি] উভয়েই $a^m - x^m$ এর গুণনীয়ক হইবে ? [মাদ্রাজ, 1875.]

19. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে,

$(x^2+7x+6)^n-(2+x)^{2n}$ রাশিমালা $3x+2$ দ্বারা বিভাজ্য।

20. দেখাও যে, $3x^3+x^2-11x+7$ কে $x-1$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য।

দেখাও যে নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহ $(a-b)(b-c)(c-a)$ দ্বারা বিভাজ্য :

21. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$.

22. $a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)$.

23. $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

24. $(a-b)^9+(b-c)^9+(c-a)^9$.

25. $a^7b^7(a-b)^{69}+b^7c^7(b-c)^{69}+c^7a^7(c-a)^{69}$.

26. 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' সাহায্যে দেখাও যে, $b+c$, $c+a$ এবং $a+b$ এর প্রত্যেকেই $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ এর গুণনীয়ক।

27. দেখাও যে, $x-y$, $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$ এর প্রত্যেকেই $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay)-(ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$ এর গুণনীয়ক।

[মাদ্রাজ, 1874.]

28. দেখাও যে, $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$ এর প্রত্যেকেই $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ এর গুণনীয়ক। [পাঞ্জাব, 1916.]

29. বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা সাহায্যে $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

30. দেখাও যে, $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ রাশিমালা $(b+c)(c+a)(a+b)(a-b)(b-c)(c-a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

31. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(41)^n-1$ এর সর্ব্ব দক্ষিণের অঙ্কটি শূন্য হইবে।

32. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $7^{2m}-1$ রাশিটি 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 এবং 48 সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য।

33. দেখাও যে, $17^8+13^7-5^8+2^7$ রাশিমালা 3 দ্বারা বিভাজ্য।

34. দেখাও যে, x^3-x-6 এবং $x^3-11x+14$ রাশিমালা দুইটির, $x-m$ এর আকারের এক সাধারণ গুণনীয়ক আছে।

35. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(81)^m.(121)^m-1$ রাশিটি 100 দ্বারা বিভাজ্য।

36. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}).$$

37. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে,

$$13^n=12(13^{n-1}+13^{n-2}+\cdots\cdots+1)+1.$$

38. ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর : $11\times101\times10001$.

39. দেখাও যে, $x^n-nx+n-1$ রাশিমালা $(x-1)^2$ দ্বারা বিভাজ্য।

40. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $a^m(a-1)+b^m(b-1)$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

নিম্নলিখিত ভাগফলগুলি নির্ণয় কর :

41. $(x^5+y^5)\div(x+y)$.

42. $(x^6-y^6)\div(x+y)$.

43. $(x^7-y^7)\div(x-y)$.

44. $(x^{16}-y^{16})\div(x^2+y^2)$.

45. $(x^{16}-y^{16})\div(x-y)$.

46. $ax^3+5x+2p$ এবং $ax^3+3x+p+6$ রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x+3$ হইলে, p এবং a এর মান নির্ণয় কর।

47. bx^2-px+5 এবং $bx^2-2x-2p$ রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x-5$ হইলে, দেখাও যে, $p=5$ এবং $b=\frac{4}{5}$.

48. qx^2+2x+p এবং qx^2+x+r রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x-a$ হইলে, দেখাও যে, $a=r-p$ এবং $q(r-p)^2+2r-p=0$.

49. $x=3$ হইলে, $x^9-3x^8+5x^7-15x^6+13x^5-39x^4+7x^3-21x^2+17x-51$ রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে 3 না বসাইয়া, অন্য উপায়ে উহার মান নির্ণয় কর।

50. $x=1{\cdot}5$ হইলে, $32x^5-48x^4+40x^3-60x^2+26x-38$ রাশিমালার মান কত?

[illegible]শ অধ্যায়

জটিলতর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(Harder H. C. F. and L. C. M.)

157. সহজে গুণনীয়ক নিরূপণ করা যায়, এরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার প্রণালী পূর্ব্বে চতুর্দ্দশ ও পঞ্চদশ অধ্যায়ে বিবৃত করা হইয়াছে। এক্ষণে, উহা হইতে জটিলতর ক্ষেত্র সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

I. জটিলতর গ. সা. গু. (Harder H. C. F.)

158. দুই বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. ও এক মিশ্র রাশিমালা (compound expression) হইলে, এই গ. সা. গু. সাধারণতঃ পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা নির্ণয় করা যায় না। এইরূপ ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হয়।

159. যে রাশিমালাতে একপদ গুণনীয়ক (monomial factor) নাই, সেইরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়মঃ

নিয়মঃ দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষর (common letter) এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালাকে (expression of higher degree) অপরটি দ্বারা [উভয়ের মান (degree) সমান হইলে, যে অপরটি দ্বারা] ভাগ কর; যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে সেই ভাগশেষকে নূতন ভাজক এবং পূর্ব্ব ভাজককে নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া পুনরায় ভাগ কর; এবং যে পর্য্যন্ত ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া না যায়, সেই পর্য্যন্ত অনুরূপ প্রণালীতে ভাগ করিয়া যাও। শেষ ভাজকটিই প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। এই প্রক্রিয়ার যে কোন অবস্থাতেই, ভাজ্য এবং তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন রাশিদ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

উপরোক্ত নিয়মের যৌক্তিকতা নিম্নলিখিতরূপে প্রতিপন্ন করা যায়:

ধর, A ও B উপরোক্তরূপ দুই রাশিমালা সূচিত করিতেছে, এবং A উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালা।

A কে নিয়মোল্লিখিত প্রণালীতে B দ্বারা ভাগ কর; মনে কর, Q ভাগফল এবং C ভাগশেষ হইল। তাহা হইলে অবশ্যই,

$$C = A - BQ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

অথবা, $$A = BQ + C \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1) হইতে দেখা যায় যে, A ও B এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই C এরও গুণনীয়ক হইবে [কারণ, $A = pa$ এবং $B = pb$ হইলে, $C = p(a - bQ)$ হইবে]। সুতরাং, A ও B এর গ. সা. গু. যদি H দ্বারা সূচিত হয়, তবে H, C এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, B ও C এর গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ... ... (ক)

এখন, (2) হইতে দেখা যায় যে, B ও C এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই A এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, উহা A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। সুতরাং, B এবং C এর গ. সা. গু. ও A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; অতএব, উহা (অর্থাৎ ঐ গ. সা. গু.) H হইতে উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না।

সুতরাং, (ক) হইতে দেখা যায় যে, B ও C এর গ. সা. গু.ও H হইবে।

অতএব, B ও C এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

এইরূপে, B কে C দ্বারা ভাগ করিলে, D যদি ভাগশেষ হয়, তবে দেখান যাইতে পারে যে, C ও D এর গ. সা. গু.ই B ও C এর গ. সা. গু. এর সমান, এবং কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

এখন, C কে D দ্বারা ভাগ কর, এবং মনে কর, কিছুই ভাগশেষ থাকিল না (অর্থাৎ ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গেল); তাহা হইলে, D ই, C ও D এর গ. সা. গু, এবং কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

অনুসি. 1. যেহেতু, যে কোন ভাজ্য ও তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু., অতএব সুবিধার জন্য উহাদের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি (monomial expression) দ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

অনুসি. 2. A কে B দ্বারা ভাগ করিবার কালে, যদি সম্পূর্ণ ভাগের পূর্বেই ভাগ-প্রক্রিয়া বন্ধ করা হয় এবং Q' যদি আংশিক ভাগফল (partial quotient) এবং

C' যদি তৎসংশ্লিষ্ট ভাগশেষ বুঝায়, তবে B ও C' এর গ. সা. গু.ও, B ও C এর গ. সা. গু. এর ন্যায়, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। কাজেই, অনুসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, C' কে B দ্বারা (অথবা, C', B হইতে নিম্নতর মানের হইলে, B কে C' দ্বারা) ভাগ করার সময় উহাদের যে কোনটিকে অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি দ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী স্পষ্টরূপে বুঝান যাইতেছে :

উদা. 1. $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $2x^3-3x^2-17x-12$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গ. সা. গু. অবশ্যই $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $3(2x^3-3x^2-17x-12)$ এর গ. সা. গু. এর সমান [অনুসি. 1]। অতএব, দ্বিতীয় রাশিমালাকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া ঐ গুণফলকে প্রথম রাশিদ্বারা ভাগ করা যাউক :

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3-3x^2-17x-12 \\
 & 3 \\
3x^3-7x^2-18x-8 & 6x^3-9x^2-51x-36 \; (2 \\
 & 6x^3-14x^2-36x-16 \\
 & \quad 5x^2-15x-20
\end{array}$$

কাজেই নির্ণেয় গ. সা. গু., $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $5x^2-15x-20$ অর্থাৎ $5(x^2-3x-4)$ এর গ. সা. গু. এর সমান ; সুতরাং, উহা $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং x^2-3x-4 এর গ. সা. গু. এরও সমান [অনুসি. 1]।

অতএব, নিম্নলিখিত প্রণালী অনুসারে কার্য্য করিতে হইবে :

$$\begin{array}{r|l}
5 & 5x^2-15x-20 \\
x^2-3x-4 & 3x^3-7x^2-18x-8 \; (3x+2 \\
 & 3x^3-9x^2-12x \\
 & \quad 2x^2-6x-8 \\
 & \quad 2x^2-6x-8
\end{array}$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-3x-4$.

উদা. 2. $22x^6-78x^5-16x^2$ এবং $2x^5-78x^2-44x$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশিমালা $=2x^2(11x^4-39x^3-8)$;

দ্বিতীয় রাশিমালা $=2x(x^4-39x-22)$.

সুতরাং, 100 নিয়মের টীকা 7 অনুসারে,

নির্ণেয় গ. সা. গু. $=$ ($2x^2$ এবং $2x$ এর গ. সা. গু.) $\times$ ($11x^4 - 39x^3 - 8$ এবং $x^4 - 39x - 22$ এর গ. সা. গু.)

$= 2x \times X$, যদি X শেষোক্ত রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্দ্দেশ করে।

এখন, X কে পূর্ব্ব নিয়ম অনুসারে নির্ণয় করা যাউক :

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^4 - 39x - 22 & 11x^4 - 39x^3 - 8 & 11 \\
 & 11x^4 - 429x - 242 & \\
\hline
 & -3)\ -39x^3 + 429x + 234 & \\
 & 13)\ 13x^3 - 143x - 78 & \\
\hline
 & x^3 - 11x - 6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3 - 11x - 6 & x^4 - 39x - 22 & x \\
 & x^4 - 11x^2 - 6x & \\
\hline
 & 11)\ 11x^2 - 33x - 22 & \\
\hline
 & x^2 - 3x - 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
x^2 - 3x - 2 & x^3 - 11x - 6 & x + 3 \\
 & x^3 - 3x^2 - 2x & \\
\hline
 & 3x^2 - 9x - 6 & \\
 & 3x^2 - 9x - 6 & \\
\hline
\end{array}
$$

সুতরাং, $X = x^2 - 3x - 2$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2x(x^2 - 3x - 2)$.

উদা. 3. $12x^4a^2 + 54x^3a^3 + 6x^2a^4 - 72xa^5$ এবং $8x^6a + 60x^5a^2 + 160x^4a^3 + 180x^3a^4 + 72x^2a^5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 6xa^2(2x^3 + 9x^2a + xa^2 - 12a^3)$.

দ্বিতীয় রাশি $= 4x^2a(2x^4 + 15x^3a + 40x^2a^2 + 45xa^3 + 18a^4)$.

অতএব, উপরোক্ত বহুপদ গুণনীয়ক(multinomial factor)-দ্বয়ের গ. সা. গু. X দ্বারা সূচিত করিলে, অবশ্যই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $=$ ($6xa^2$ এবং $4x^2a$ এর গ. সা. গু.) $\times X$ হইবে।

এখন, X নির্ণয় করা যাউক :

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x^3 + 9x^2a + xa^2 - 12a^3 & 2x^4 + 15x^3a + 40x^2a^2 + 45xa^3 + 18a^4 & x \\
 & 2x^4 + 9x^3a + x^2a^2 - 12xa^3 & \\
\hline
 & 3a)\ 6x^3a + 39x^2a^2 + 57xa^3 + 18a^4 & \\
\hline
 & 2x^3 + 13x^2a + 19xa^2 + 6a^3 &
\end{array}
$$

কাজেই, X, $2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3$ এবং $2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3$ এর গ. সা. গু. হইবে ; যেহেতু, এতদুভয়ই সমান মানের (of the same degree) রাশিমালা, অতএব উহাদের যে কোনটিকে অপরটি দ্বারা ভাগ করা যাইতে পারে।

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 & 2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3 \;(\;1 \\
 & \underline{2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3} \\
 & 2a)\underline{4x^2a+18xa^2+18a^3} \\
 & \quad 2x^2+9xa+9a^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+9xa+9a^2 & 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 \;(\;x \\
 & \underline{2x^3+9x^2a+9xa^2} \\
 & -4a^2)\underline{-8xa^2-12a^3} \\
 & \quad 2x+3a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x+3a & 2x^2+9xa+9a^2 \;(\;x+3a \\
 & \underline{2x^2+3xa} \\
 & \quad 6xa+9a^2 \\
 & \quad \underline{6xa+9a^2}
\end{array}
$$

সুতরাং, $X=2x+3a$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2xa(2x+3a)$.

উদা. 4. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ এবং $6x^4+14x^3+36x^2+14x+10$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় রাশি $=2(3x^4+7x^3+18x^2+7x+5)$; কিন্তু, যেহেতু, 2 প্রথম রাশির গুণনীয়ক নহে, অতএব, প্রথম রাশি এবং $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4+11x^3+27x^2+17x+5 \\
 & \underline{3} \\
3x^4+7x^3+18x^2+7x+5 & 12x^4+33x^3+81x^2+51x+15 \;(\;4 \\
 & \underline{12x^4+28x^3+72x^2+28x+20} \\
 & \quad 5x^3+9x^2+23x-5
\end{array}
$$

$$3x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 7x + 5$$
$$5$$
$$5x^3 + 9x^2 + 23x - 5)\overline{15x^4 + 35x^3 + 90x^2 + 35x + 25}(3x$$
$$\underline{15x^4 + 27x^3 + 69x^2 - 15x}$$
$$8x^3 + 21x^2 + 50x + 25$$
$$5$$
$$\overline{40x^3 + 105x^2 + 250x + 125}(8$$
$$\underline{40x^3 + \;\;72x^2 + 184x - \;\;40}$$
$$33)\underline{33x^2 + \;\;66x + 165}$$
$$x^2 + \;\;\;2x + \;\;\;5$$

$$x^2 + 2x + 5)5x^3 + \;\;9x^2 + 23x - 5(5x - 1$$
$$\underline{5x^3 + 10x^2 + 25x}$$
$$-x^2 - \;\;2x - 5$$
$$\underline{-x^2 - \;\;2x - 5}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^2 + 2x + 5$.

উদা. 5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$$4x^4 - 16x^3 + 108 \text{ এবং } 6x^5 - 14x^3 - 40x^2 + 36.$$

প্রথম রাশি $= 4(x^4 - 4x^3 + 27)$.

দ্বিতীয় রাশি $= 2(3x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 18)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের বহুপদ-গুণনীয়ক (multinomial factors) দুইটির গ. সা. গু.কে X দ্বারা সূচিত করিলে, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2X$.

এখন, Xকে নির্ণয় করিতে হইবে :

$${}^4 - 4x^3 + 27)3x^5 - \;\;7x^3 - 20x^2 + 18(3x + 12$$
$$\underline{3x^5 - 12x^4 + 81x}$$
$$12x^4 - \;\;7x^3 - 20x^2 - 81x + \;\;18$$
$$\underline{12x^4 - 48x^3 \qquad\qquad\qquad + 324}$$
$$41x^3 - 20x^2 - 81x - 306$$

$$x^4 - 4x^3 + 27$$
$$41$$
$$41x^3 - 20x^2 - 81x - 306)\overline{41x^4 - 164x^3 + 1107}(x$$
$$\underline{41x^4 - \;\;20x^3 - 81x^2 - 306x}$$
$$-9)\underline{-144x^3 + 81x^2 + 306x + 1107}$$
$$16x^3 - \;\;9x^2 - \;\;34x - 123$$

$$\begin{array}{l} 16x^3 - 9x^2 - 34x - 123 \\ 41 \\ \hline 656x^3 - 369x^2 - 1394x - 5043 \,(16 \\ 656x^3 - 320x^2 - 1296x - 4896 \\ \hline -49\,)\,- 49x^2 - 98x - 147 \\ \qquad x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2+2x+3)\,41x^3 - 20x^2 - 81x - 306\,(41x - 102 \\ \qquad 41x^3 + 82x^2 + 123x \\ \hline \qquad -102x^2 - 204x - 306 \\ \qquad -102x^2 - 204x - 306 \\ \hline \end{array}$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2(x^2 + 2x + 3)$.

প্রশ্নমালা 83

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $2x^2 + 5x - 3$ এবং $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$ এর।

2. $3x^2 + 16x - 12$ এবং $3x^3 + 4x^2 - 28x + 16$ এর।

3. $2x^2 - 3ax - 20a^2$ এবং $2x^3 + 3ax^2 - 45a^2x - 100a^3$ এর।

4. $3x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 24x$ এবং $6x^4 - 10x^3 - 24x^2$ এর।

5. $6a^3 - 11a^2 - 3a + 2$ এবং $3a^3 + 20a^2 + 23a - 10$ এর।

6. $6a^3 - 25a^2b + 32ab^2 - 12b^3$ এবং $4a^3 + 12a^2b - 7ab^2 - 30b^3$ এর।

7. $3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ এবং $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ এর।

8. $4x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 3y^3$ এবং $3x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 4y^3$ এর।

9. $6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x$ এবং $4x^5 - 18x^4 - 8x^3 - 10x^2$ এর।

10. $3x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 4x + 1$ এবং $2x^3 + 3x^2 - 7x - 3$ এর।

11. $4x^3 + 13x^2 - 8x - 3$ এবং $3x^4 + 13x^3 + 9x^2 + 9x + 2$ এর।

12. $12a^3 + 11a^2x + 6ax^2 + x^3$ এবং $21a^3 + 17a^2x + 9ax^2 + x^3$ এর।

13. $35a^3 + 31a^2x + 13ax^2 + 2x^3$ এবং $65a^3 + 54a^2x + 22ax^2 + 3x^3$ এর।

14. $70x^3 - 9ax^2 + 11a^2x + 6a^3$ এবং $91x^3 - 25ax^2 + 20a^2x + 4a^3$ এর।

15. $75x^3 - 35x^2 + 24x + 4$ এবং $85x^3 - 36x^2 + 25x + 6$ এর।

16. $35x^3 - 34x^2 + 3x + 2$ এবং $49x^3 - 90x^2 + 5x + 3$ এর।

17. $4x^6 + 2ax^5 + 14a^2x^4 + 10a^3x^3 + 24a^4x^2$ এবং $6x^6 + 21ax^5 + 30a^2x^4 + 24a^3x^3$ এর।

18. $4a^4+32a^3+72a^2+44a+8$ এবং
$6a^4+54a^3+138a^2+78a+12$ এর।

19. $2x^4-19x^2+21x-6$ এবং $6x^4+21x^3+3x-6$ এর।

20. $12x^4-30x^2+126x+90$ এবং $15x^4-25x^3+145x-75$ এর।

21. $18x^4+117x^3+162x^2+72x+9$ এবং
$12x^4+68x^3+72x^2+108x+20$ এর।

22. $x^5-5x^2+6x+12$ এবং $x^4-8x^2-24x-32$ এর।

23. $x^4+5x^3+3x^2-14x-40$ এবং $x^5-4x^3+45x+75$ এর।

24. $4x^5-8x^3a^2+28x^2a^3-24xa^4+24a^5$ এবং
$6x^4+24x^3a-12x^2a^2-24xa^3+96a^4$ এর।

25. $9x^4-18x^3y-13x^2y^2-38xy^3-12y^4$ এবং
$6x^5+4x^4y+5x^3y^2+4x^2y^3+8y^5$ এর।

26. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$ এর।

27. $32a^4+104a^3-20a^2-122a+30$ এবং
$60a^5+10a^4-45a^3+45a^2-50a$ এর।

28. $x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ এবং $3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$ এর।

160. অনেকস্থলে নিম্নলিখিত উপপত্তি সাহায্যে অতি সহজে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়ঃ

উপপত্তিঃ A ও B দুইটি একপদ-গুণনীয়ক-বর্জ্জিত রাশিমালা হইলে, যদি $m, n, p, q,$ এরূপ চারিটি অঙ্ক-সংখ্যা (numerical quantity) বুঝায় যে, $mq-np$ এর সাংখ্যমান শূন্য নহে, তাহা হইলে B ও A এর গ. সা. গু. এবং $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর গ. সা. গু., উভয়ই এক। (শেষোক্ত প্রত্যেক রাশিমালাতেই সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক বর্জ্জনীয়।)

ধর, A ও B এর গ. সা. গু. H দ্বারা এবং (সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক বর্জ্জিত) $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর গ. সা. গু. H' দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখন, যেহেতু A ও B এর **প্রত্যেক** সাধারণ গুণনীয়কই $mA+nB$ এর গুণনীয়ক, আবার $pA+qB$ এরও গুণনীয়ক, সুতরাং H নিশ্চয়ই $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

কাজেই, H', হয় H এর সমান, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ... ... (ক)

আবার, যেহেতু $q(mA+nB)-n(pA+qB)=(mq-np)A,$

এবং $m(pA+qB)-p(mA+nB)=(mq-np)B,$

অতএব, $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই $(mq-np)A$ এর, এবং $(mq-np)B$ এরও, গুণনীয়ক হইবে। এখন, যেহেতু প্রদত্ত সর্তানুসারে, $mq-np$ একটি অঙ্ক-সংখ্যামাত্র, অতএব, $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর অঙ্ক-গুণনীয়ক ব্যতীত অপর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই A এর, এবং B এরও গুণনীয়ক হইবে। কাজেই, H' স্পষ্টতঃ A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

অতএব, H', H হইতে উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না।

অতএব, (ক) হইতে, $H'=H$;

অর্থাৎ, উপপত্তিটি প্রতিষ্ঠিত হইল।

অনুসি. 1. A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A+B$ ও $A-B$ এর গ. সা. গু. উভয়ই এক। [এস্থলে, $m=1, n=1, p=1$ এবং $q=-1$ ধরিতে হইবে।]

অনুসি. 2. A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A\pm B$ ও B এর গ. সা. গু. উভয়ই এক। [এস্থলে, $m=1, n=\pm1, p=0$ এবং $q=1$.]

তদ্রূপ, A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A\pm B$ ও A এর গ. সা. গু.ও এক।

উদা. 1. $x^4+x^3-5x^2-3x+2$ এবং $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ধর, $A=x^4+x^3-5x^2-3x+2,$

এবং $B=x^4-3x^3+x^2+3x-2.$

তাহা হইলে, $A+B=2x^4-2x^3-4x^2=2x^2(x^2-x-2),$

এবং $A-B=4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2).$

অতএব, অনুসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, নির্ণেয় গ. সা. গু., $x^2(x^2-x-2)$ এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর গ. সা. গু. এর সমান; কাজেই, উহা x^2-x-2 এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর সমান হইবে।

ধর, $A'=x^2-x-2,$

এবং $B'=2x^3-3x^2-3x+2.$

তাহা হইলে, $A'+B'=2x^3-2x^2-4x=2x(x^2-x-2).$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=A'$ এবং $(A'+B')$ এর গ. সা. গু. [অনুসি. 2]

$=x^2-x-2.$

উদা. 2. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ এবং $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ধর, $A=4x^4+11x^3+27x^2+17x+5,$

এবং $B=3x^4+7x^3+18x^2+7x+5.$

তাহা হইলে, $A-B=x^4+4x^3+9x^2+10x=x(x^3+4x^2+9x+10)$,

এবং $3A-4B=5x^3+9x^2+23x-5$.

অতএব, $x^3+4x^2+9x+10$ এবং $5x^3+9x^2+23x-5$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

ধর, $A'=x^3+4x^2+9x+10$,

এবং $B'=5x^3+9x^2+23x-5$.

তাহা হইলে, $A'+2B'=11x^3+22x^2+55x=11x(x^2+2x+5)$,

এবং $5A'-B'=11x^2+22x+55=11(x^2+2x+5)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x(x^2+2x+5)$ এবং x^2+2x+5 এর গ. সা. গু.

$$=x^2+2x+5.$$

উদা. 3. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865.]

ধর, $A=4x^5+11x^4+81$,

এবং $B=2x^5-11x^2-9$.

তাহা হইলে, $A-2B=11x^4+22x^2+99=11(x^4+2x^2+9)$.

এবং $A+9B=22x^5+11x^4-99x^2=11x^2(2x^3+x^2-9)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^4+2x^2+9$ এবং $x^2(2x^3+x^2-9)$ এর গ. সা. গু.।

সুতরাং, উহা x^4+2x^2+9 এবং $2x^3+x^2-9$ এর গ. সা. গু.।

ধর, $A'=x^4+2x^2+9$,

এবং $B'=2x^3+x^2-9$.

তাহা হইলে, $A'+B'=x^4+2x^3+3x^2=x^2(x^2+2x+3)$.

অতএব, $2x^3+x^2-9(=B')$ এবং $x^2+2x+3(=C')$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে

এখন, যেহেতু $B'+3C'=2x^3+4x^2+6x$

$$=2x(x^2+2x+3);$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2+2x+3$.

প্রশ্নমালা 84

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^3-3x^2-4x+12$ এবং $x^3-7x^2+16x-12$ এর।
2. $2x^3-17x+12$ এবং $4x^4-2x^3-34x^2+41x-12$ এর।
3. $4x^3+13x^2+19x+4$ এবং $2x^3+5x^2+5x-4$ এর।
4. $3x^3-5x^2+7$ এবং $6x^4-7x^3-5x^2+14x+7$ এর।
5. $6x^4-11x^3+16x^2-22x+8$ এবং $6x^4-11x^3-8x^2+22x-8$ এর।
6. $2x^4+19x^3+20x^2-31x+8$ এবং $2x^4+7x^3-64x^2+62x-16$ এর।
7. $3x^4-7x^3-27x^2-6x+2$ এবং $3x^4-13x^3-40x^2-9x+3$ এর।
8. $5x^4-18x^3-7x^2+12x+3$ এবং $5x^4-23x^3-9x^2+16x+4$ এর।
9. $2x^4-5x^3-17x^2-2x+2$ এবং $6x^5+23x^4+34x^3+21x^2-2x-2$ এর।
10. $6x^5+9x^4-13x^3-4x^2+9x-3$ এবং $9x^5+12x^4-18x^3-5x^2+12x-4$ এর।
11. x^5-x^3+8 এবং x^5-x^2+4 এর।
12. $3x^5+139x^2-44$ এবং $39x^5+139x^4-16$ এর।

161. সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, এই প্রকার তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় :

ধর, A, B, C দ্বারা সূচিত রাশিমালাত্রয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, A ও B এর গ. সা. গু. G দ্বারা, G ও C এর গ. সা. গু. H দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখন G, A ও B এর সকল সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফল বলিয়া, G এর প্রত্যেক গুণনীয়কই A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। সুতরাং, G ও C এর সকল সাধারণ গুণনীয়কই A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

অতএব, A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক H হইবে। কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ··· (ক)

কিন্তু, যেহেতু A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই Gএর উৎপাদক, অতএব, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই G ও C এরও সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. ও অবশ্যই G ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; কাজেই, উহা H হইতে উচ্চতর মানের কোন রাশিমালা হইতে পারে না।

অতএব, (ক) হইতে, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= H$.

অনুরূপ যুক্তি দ্বারা দেখান যাইতে পারে যে, D যদি চতুর্থ এক রাশিমালা বুঝায়, তাহা হইলে, H ও D এর গ. সা. গু.ই A, B, C ও D এর গ. সা. গু. হইবে।

অতএব, তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

A, B, C, D,... প্রভৃতি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে A ও B এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; তৎপরে, লব্ধ গ. সা. গু. ও C এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; তৎপরে এই গ. সা. গু. ও D এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; ইত্যাদি। সর্ব্বশেষ গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

উদা.। গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$, $3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24$ এবং $5x^4 + 9x^3 - 47x^2 - 81x + 18$.

প্রথমে, প্রথম দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যাউক :

ধর, $A = 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$,

এবং $B = 3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24$.

তাহা হইলে, $A + B = 5x^4 + 7x^3 - 28x^2 - 12x$

$= x(5x^3 + 7x^2 - 28x - 12)$,

এবং $-3A + 2B = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$.

অতএব, A ও B এর গ. সা. গু., $5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$ এবং $49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$ এতদুভয়ের গ. সা. গু. এর সমান।

এখন, মনে কর $A' = 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$,

এবং $B' = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$.

তাহা হইলে, $10A' + B' = 99x^3 + 99x^2 - 594x$

$= 99x(x^2 + x - 6)$.

অতএব, A ও B এর গ. সা. গু.

$$\left.\begin{array}{r} 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12 (= A') \\ \text{এবং} \quad x^2 + x - 6 (= C') \end{array}\right\}$$ এর গ. সা. গু. এর সমান।

এখন, $A' - 2C' = 5x^3 + 5x^2 - 30x = 5x(x^2 + x - 6)$;

A ও B এর গ. সা. গু. $= C'$ এবং $A' - 2C'$ এর গ. সা. গু.

$= x^2 + x - 6$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু., x^2+x-6 এবং $5x^4+9x^3-47x^2-81x+18$ এতদুভয়ের গ. সা. গু.এর সমান। এই শেষোক্ত গ. সা. গু. নিম্নলিখিতরূপে নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$
\begin{array}{l}
x^2+x-6\ )\ 5x^4+9x^3-47x^2-81x+18\ (\ 5x^2+4x \\
\qquad\qquad\quad 5x^4+5x^3-30x^2 \\
\qquad\qquad\qquad 4x^3-17x^2-81x+18 \\
\qquad\qquad\qquad 4x^3+4x^2-24x \\
\qquad\qquad\quad -3)\ -21x^2-57x+18 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^2+19x-6\ (\ 7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^2+7x-42 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 12\ )\ 12x+36 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x+3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x+3\ )\ x^2+x-6\ (\ x-2 \\
\qquad\quad x^2+3x \\
\qquad\qquad -2x-6 \\
\qquad\qquad -2x-6
\end{array}
$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+3$.

প্রশ্নমালা 85

গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

1. $2x^3+7x^2-5x-4$, $x^3+8x^2+11x-20$ এবং $2x^3+19x^2+49x+20$ এর।
2. $2x^4+3x^3+8x^2+15x-10$, $2x^4-5x^3+12x^2-25x+10$ এবং $2x^4-5x^3+10x^2-20x+8$ এর।
3. $2x^4+7x^3-19x^2-14x+30$, $2x^4+5x^3-16x^2-10x+24$ এবং $2x^4+5x^3-10x^2+5x-12$ এর।
4. $2x^4-4x^3-69x^2-2x-35$, $2x^4-6x^3-55x^2-3x-28$ এবং $2x^4+18x^3+41x^2+9x+20$ এর।
5. $3a^3+28a^2b+52ab^2-48b^3$, $3a^3+4a^2b-28ab^2+16b^3$ এবং $3a^3+10a^2b-44ab^2+24b^3$ এর।
6. $6a^3+5a^2b-34ab^2+15b^3$, $6a^3-37a^2b+57ab^2-20b^3$ এবং $3a^3-8a^2b-31ab^2+60b^3$ এর।

7. $3x^4+11x^3-32x^2-44x+80$, $3x^4-x^3-52x^2+124x-80$, $3x^4+2x^3-20x^2-8x+32$ এবং $3x^4+2x^3-83x^2-50x+200$ এর।

8. $6x^5+14x^4-53x^3-37x^2+66x+24$, $6x^5-28x^4+17x^3+54x^2-39x-18$, $6x^5+8x^4-79x^3-36x^2+105x+36$ এবং $2x^5-2x^4-31x^3+51x^2+42x-72$ এর।

II. জটিল ল. সা. গু.

162. পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায় না, এইরূপ দুই রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ

ধর, A ও B উপরোক্তরূপ দুই রাশিমালা এবং H উহাদের গ. সা. গু. বুঝাইতেছে। A ও B কে H দ্বারা ভাগ কর, এবং মনে কর, ভাগফলদ্বয় যথাক্রমে a ও b দ্বারা সূচিত হইতেছে। তাহা হইলে,

$$\left.\begin{aligned} A&=aH \\ \text{এবং}\quad B&=bH \end{aligned}\right\}$$

এখন, যেহেতু a ও b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, অতএব, A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই (common multiple এর) একটি গুণনীয়ক $a \times H \times b$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু $= aHb$.

$$\text{কিন্তু,}\quad aHb = \frac{A}{H} \times B$$

$$\text{অথবা,}\quad A \times \frac{B}{H}.$$

$$\text{কাজেই, নির্ণেয় ল. সা. গু.} = \frac{A}{H} \times B, \quad \text{অথবা} = A \times \frac{B}{H}.$$

সুতরাং, দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, একটিকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে অপরটি দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অনুসি.। যদি A ও B এর ল. সা. গু. L দ্বারা সূচিত হয়, তবে অবশ্যই, $L \times H = A \times B$; অর্থাৎ, দুই রাশিমালার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর গুণফল, ঐ রাশিমালাদ্বয়ের গুণফলের সমান।

টীকা। দুই রাশিমালার ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকিলে, উহাদের গুণফলই রাশিমালাদ্বয়ের ল. সা. গু. হইবে।

উদা. 1. $6x^3+25x^2+16x+7$ এবং $6x^3-11x^2-8x-5$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l|l} 6x^3-11x^2-8x-5 & 6x^3+25x^2+16x+7 & 1 \\ & 6x^3-11x^2-8x-5 & \\ \hline 12 & 36x^2+24x+12 & \\ & 3x^2+2x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 3x^2+2x+1 & 6x^3-11x^2-8x-5 & 2x-5 \\ & 6x^3+4x^2+2x & \\ \hline & -15x^2-10x-5 & \\ & -15x^2-10x-5 & \\ \hline \end{array}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিসমূহের গ. সা. গু. $=3x^2+2x+1$.

সুতরাং, নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$=\frac{6x^3-11x^2-8x-5}{3x^2+2x+1}(6x^3+25x^2+16x+7)$$
$$=(2x-5)(6x^3+25x^2+16x+7)$$
$$=12x^4+20x^3-93x^2-66x-35.$$

প্রশ্নমালা 86

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $3x^3+2x^2-11x+4$ এবং $3x^3+14x^2+13x-8$ এর।
2. $6x^3+17x^2+9x-4$ এবং $6x^3-7x^2-27x+8$ এর।
3. $12x^3-4x^2-25x+12$ এবং $12x^3-28x^2+7x+12$ এর।
4. $9x^3-12x^2-15x+20$ এবং $15x^3+12x^2-25x-20$ এর।
5. $4x^3-10x^2-18x+45$ এবং $6x^3+8x^2-27x-36$ এর।
6. $4x^4+4x^3+7x^2+11x+4$ এবং $6x^4+7x^3+4x^2+5x+2$ এর।
7. $8x^4-6x^3-8x^2+9x-6$ এবং $16x^4-12x^3+20x^2-9x+6$ এর।
8. $4x^4+8x^3+21x^2+18x+27$ এবং $3x^4+6x^3+17x^2+16x+24$ এর।
9. দুইটি সংখ্যা x ও y এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l; এবং $h+l=x+y$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$. [পাঞ্জাব প্রবেশিকা, 1891.]

163. তিন বা তদধিক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ

মনে কর, A, B, C দ্বারা সূচিত রাশিমালাত্রয়ের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন ধর, A ও B এর ল. সা. গু. L দ্বারা, এবং L ও C এর ল. সা. গু. M দ্বারা, সূচিত করা হইল।

তাহা হইলে, স্পষ্টই L ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই (common multiple) A, B ও C এর সাধারণ গুণিতক হইবে; ... ... (1)

আবার, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই স্পষ্টতঃ C এরও গুণিতক। ... ... (2)

অতএব, (1) হইতে, A, B ও C এর সাধারণ গুণিতক M হইবে। কা A, B ও C এর ল. সা. গু., হয় M, নতুবা M হইতে নিম্নতর মানের কোন রাশিমালা হইবে।

কিন্তু, A, B, C এর ল. সা. গু. M হইতে নিম্নতর মানের কোন বাশিমালা হইতে পারে না; কারণ, (2) হইতে দেখা যায় যে, A, B, C এর ল. সা. গু. অবশ্যই L ও C এর গুণিতক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= M$.

সুতরাং, A, B, C, D ইত্যাদি দ্বারা সূচিত রাশিমালাসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে A ও B এর ল. সা. গু.; তৎপরে এই লব্ধ ল. সা. গু. ও C এর ল. সা. গু., তৎপরে এই শেষোক্ত ল. সা. গু. ও D এর ল. সা. গু., ইত্যাদিক্রমে ল. সা. গু.-সমূহ নির্ণয় করিয়া যাইতে হয়। এইরূপ প্রক্রিয়ালব্ধ সর্ব্বশেষ ল. সা. গু.ই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদা.। ল. সা. গু. নির্ণয় কর:

$$6x^2-11x+3,\ 4x^2-4x-3 \text{ এবং } 6x^2+25x-9 \text{ এর।}$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
6x^2-11x+3 & 6x^2+25x-9 & 1 \\
 & 6x^2-11x+3 & \\ \hline
 & 12)\ 36x-12 & \\
 & \quad 3x-1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
3x-1 & 6x^2-11x+3 & 2x-3 \\
 & 6x^2-2x & \\ \hline
 & -9x+3 & \\
 & -9x+3 &
\end{array}
$$

অতএব, $6x^2-11x+3$ এবং $6x^2+25x-9$ এর গ. সা. গু. $=3x-1$.

সুতরাং, এই রাশিমালা দুইটির ল. সা. গু.

$$=\frac{6x^2-11x+3}{3x-1}(6x^2+25x-9)$$
$$=(2x-3)(6x^2+25x-9)$$
$$=12x^3+32x^2-93x+27.$$

এখন, $4x^2-4x-3$ এবং $12x^3+32x^2-93x+27$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|l|l} 4x^2-4x-3 & 12x^3+32x^2-93x+27 & 3x+11 \\ & 12x^3-12x^2-9x & \\ \hline & 44x^2-84x+27 & \\ & 44x^2-44x-33 & \\ \hline -20) & -40x+60 & \\ & 2x-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2x-3 & 4x^2-4x-3 & 2x+1 \\ & 4x^2-6x & \\ \hline & 2x-3 & \\ & 2x-3 & \end{array}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিসমূহের গ. সা. গু. $=2x-3$.

সুতরাং, তাহাদের ল. সা. গু. $=\dfrac{4x^2-4x-3}{2x-3}(12x^3+32x^2-93x+27)$

$$=(2x+1)(12x^3+32x^2-93x+27)$$
$$=24x^4+76x^3-154x^2-39x+27.$$

প্রশ্নমালা 87

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $3x^2-10x-8,\ 4x^2-20x+9$ এবং $6x^2+x-2$ এর।
2. $3x^2-23x-8,\ 6x^2-7x-3$ এবং $2x^2-11x+12$ এর।
3. $6x^2-19x+10,\ 12x^2-11x+2$ এবং $8x^2+10x-3$ এর।
4. $2x^4+4x^3+x^2+6x-3,\ 4x^4+8x^3-7x^2-6x+3$ এবং $8x^4+4x^3-2x^2-3x-3$ এর

পঞ্চবিংশ অধ্যায়

জটিল ভগ্নাংশ (Harder Fractions)

164. ষোড়শ অধ্যায়ে বর্ণিত ভগ্নাংশ হইতে জটিলতর ভগ্নাংশ সম্বন্ধে এক্ষণে আলোচনা করা যাইতেছে।

I. ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন

(Reductions of Fractions to lowest terms)

165. কোন ভগ্নাংশের হর ও লবে যদি কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকে, তবে সেই ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ (fractions reduced to its lowest terms) বলা হয়। যে সকল ক্ষেত্রে, হর ও লবকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই সকল ক্ষেত্রে হর ও লব হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়াই ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত করিতে হয়। অন্যথায়, হর ও লবের প্রত্যেককে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লঘিষ্ঠ আকার নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}.$$

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{(a+b+c)(bc+ca+ab)}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{bc+ca+ab}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}.$

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)} = 1.$$

[উদা. 1, নিয়ম 132.]

উদা. 3. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :

$$\frac{3x^3-27ax^2+78a^2x-72a^3}{2x^3+10ax^2-4a^2x-48a^3}.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

$$\text{লব} = 3(x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3).$$

$$\text{হর} = 2(x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3).$$

এখন, ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r} x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3 \\ x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3 \\ \hline 14ax)\ 14ax^2-28a^2x \\ x-2a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-2a)\ x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3\ (x^2-7ax+12a^2 \\ \qquad\quad x^3-2ax^2 \\ \hline \qquad\quad -7ax^2+26a^2x-24a^3 \\ \qquad\quad -7ax^2+14a^2x \\ \hline \qquad\qquad\qquad 12a^2x-24a^3 \\ \qquad\qquad\qquad 12a^2x-24a^3 \\ \hline \end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x-2a$.

স্নতরাং, নির্ণেয় ফল $=\dfrac{3(x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3)\div(x-2a)}{2(x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3)\div(x-2a)}$

$$=\frac{3(x^2-7ax+12a^2)}{2(x^2+7ax+12a^2)}.$$

উদা. 4. $\dfrac{2x^4-x^3-9x^2+13x-5}{7x^3-19x^2+17x-5}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1870.]

প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. নিম্নোক্ত প্রকারে নির্ণয় করা যায়:

[অনুসি. 2, নিয়ম 160.]

$$\begin{array}{r} 2x^4-x^3-9x^2+13x-5 \\ 7x^3-19x^2+17x-5 \\ \hline 2x\ )2x^4-8x^3+10x^2-4x \\ x^3-4x^2+5x-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3-4x^2+5x-2\ )\ 7x^3-19x^2+17x-5\ (\ 7 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 7x^3-28x^2+35x-14 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 9\ )\ 9x^2-18x+9 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2-2x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2-2x+1\ )\ x^3-4x^2+5x-2\ (\ x-2 \\ \qquad\qquad\quad x^3-2x^2+x \\ \hline \qquad\qquad\quad -2x^2+4x-2 \\ \qquad\qquad\quad -2x^2+4x-2 \\ \hline \end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-2x+1$.

সুতরাং, নির্ণেয় ফল

$$\frac{(2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5) \div (x^2 - 2x + 1)}{(7x^3 - 19x^2 + 17x - 5) \div (x^2 - 2x + 1)} = \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x - 5}.$$

প্রশ্নমালা 88

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :

1. $\dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}$

2. $\dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}.$

3. $\dfrac{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 3b^3}{a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 4b^3}.$

4. $\dfrac{x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4}{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - b^4}.$

5. $\dfrac{3x^3 + 4x^2y - 7xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 9x^2y + 8xy^2 - 5y^3}.$

6. $\dfrac{1 + 3x - x^3 - 3x^4}{1 - x + 2x^2 + x^3 + 3x^4}.$

7. $\dfrac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}.$

8. $\dfrac{x^4 + x^2 + 25}{x^4 - 9x^2 + 30x - 25}.$

9. $\dfrac{2x^3 + 3ax^2 + 5a^2x - 21a^3}{4x^3 - 12ax^2 + 19a^2x - 15a^3}$

10. $\dfrac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 3}{3x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 4}.$

11. $\dfrac{9x^3 - 7a^2x - 2a^3}{9x^3 + 6ax^2 - 5a^2x - 2a^3}.$

12. $\dfrac{2a^3 - 16a^2b + 44ab^2 - 42b^3}{3a^3 + 6a^2b - 24ab^2 - 63b^3}.$

13. $\dfrac{9x^4 + 30x^3 + 12x^2 - 6x - 45}{8x^4 + 28x^3 + 16x^2 - 4x - 48}.$

14. $\dfrac{6a^6 - 9a^5b + a^4b^2 + 3a^3b^3 - a^2b^4}{4a^5 - 6a^4b + 3a^2b^3 - ab^4}.$

15. $\dfrac{24x^5 + 16x^4y - 28x^3y^2 - 24x^2y^3 - 12xy^4}{45x^4y + 30x^3y^2 - 15x^2y^3 - 20xy^4 - 10y^5}.$

16. $\dfrac{(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)}{(b+c)^2(b-c) + (c+a)^2(c-a) + (a+b)^2(a-b)}.$

17. $\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) - (yz+x)(zx+y)(xy+z)}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz}.$

18. $\dfrac{(x+y-2z)^3 + (y+z-2x)^3 + (z+x-2y)^3}{12(x+y-2z)(y+z)(y+z-2x)}.$

19. $\dfrac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x-z) + (y-z)(y-x) + (z-x)(z-y)}.$

20. $\dfrac{7x^3 - 2x^2y - 63xy^2 - 18y^3}{5x^4 - 3x^3y - 43x^2y^2 + 27xy^3 - 18y^4}.$ [পাঞ্জাব, 1912.]

II. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

166. যেহেতু, $\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\cdots\cdots=\frac{p+q+r+\cdots}{a}$, অতএব, দেখা যায় যে, সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ভগ্নাংশসমূহের সাধারণ হরটিকে যোগফলের হর এবং লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে যোগফলের লবরূপে লইলেই, নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশসমূহ সাধারণ হরবিশিষ্ট না হইলে, 108 নিয়মে প্রদত্ত পদ্ধতি অনুসারে উহাদিগের প্রত্যেককে তুল্য সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া উপরোক্ত প্রণালী অনুসারে কার্য্য করিতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $\frac{}{(x-a)^n}+\frac{2a}{(x-a)^{n-1}}+\frac{}{(x-a)^{n-2}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{a^2}{(x-a)^n}+\frac{2a(x-a)}{(x-a)^n}+\frac{(x-a)^2}{(x-a)^n}=\frac{a^2+2a(x-a)+(x-a)^2}{(x-a)^n}$$

$$=\frac{\{a+(x-a)\}^2}{(x-a)^n}=\frac{x^2}{(x-a)^n}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}+\frac{32}{x^4+16}$.

এইপ্রকার রাশিসমূহকে সরল করিতে হইলে, প্রথমে সুবিধামত যে কোন দুইটি পদকে যোগ করিয়া, লব্ধ যোগফলের সহিত যে কোন অপর একটি তৃতীয় পদ, ইত্যাদি-রূপে, ক্রমশঃ যোগ করিয়া যাইতে হয়।

এখন, $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4};$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}=\frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}=\frac{32}{x^4-16};$$

এবং, $$\frac{32}{x^4-16}+\frac{32}{x^4+16}=\frac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}=\frac{64x^4}{x^8-256}.$$

[নির্ণেয় ফল]

. 3. সরল কর : $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+4b}$.

সকল পদগুলিকে একত্র লইয়া সরল না করিয়া উহাদিগকে কয়েকটি বিভাগে ভাগ করিয়া লওয়াই সুবিধাজনক।

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}\right\}-\left\{\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{a+4b}\right\}.$

এখন, $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}=\frac{(a+2b)-(a+b)}{(a+b)(a+2b)}=\frac{b}{(a+b)(a+2b)};$

এবং $\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{a+4b}=\frac{(a+4b)-(a+3b)}{(a+3b)(a+4b)}=\frac{b}{(a+3b)(a+4b)}.$

আবার, $\frac{b}{(a+b)(a+2b)}-\frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$

$$=\frac{b(a+3b)(a+4b)-b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)},$$

এখন, ইহার লব $=b(a^2+7ab+12b^2)-b(a^2+3ab+2b^2)$

$$=b(4ab+10b^2)=2b^2(2a+5b).$$

সুতরাং, নির্ণেয় ফল $=\frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}.$

উদা. 4. সরল কর : $\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}.$

[পাঞ্জাব, 1904.]

প্রথম হর $=x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$

দ্বিতীয় হর $=x^2-4x+3=(x-3)(x-1).$

তৃতীয় হর $=x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$

$\therefore$ হরগুলির ল. সা. গু. $=(x-1)(x-2)(x-3).$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-3)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

উদা. 5. সরল কর :

$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}.$ [এলাহাবাদ, 1915.]

হরগুলির ল. সা. গু. $=(a+x)(a+y)(a+z).$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{(a+z)(x-y)+(a+x)(y-z)+(a+y)(z-x)}{(a+x)(a+y)(a+z)}.$

ইহার লব $= a\{(x-y)+(y-z)+(z-x)\}+z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)$
$=0.$ [সরল করিয়া]

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{0}{(a+x)(a+y)(a+z)} = 0.$

অন্যপ্রকারে : যেহেতু $\dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{a+x} = \dfrac{(a+x)-(a+y)}{(a+x)(a+y)} = \dfrac{x-y}{(a+x)(a+y)}$,

$\dfrac{1}{a+z} - \dfrac{1}{a+y} = \dfrac{(a+y)-(a+z)}{(a+y)(a+z)} = \dfrac{y-z}{(a+y)(a+z)}$,

এবং $\dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{a+z} = \dfrac{(a+z)-(a+x)}{(a+z)(a+x)} = \dfrac{z-x}{(a+z)(a+x)}$,

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a+z} - \dfrac{1}{a+y} + \dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{a+z} = 0.$

উদা. 6. সরল কর : $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{2a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4}.$

এইপ্রকার রাশিমালার সহিত সুবিধামত অন্য একটি ভগ্নাংশ যোগ ও বিয়োগ করিয়া রাশিমালাকে অতি সহজে সরল করা যায়। যথা, বর্ত্তমান ক্ষেত্রে, $\dfrac{a}{a-b}$ ভগ্নাংশটিকে প্রদত্ত রাশিমালার সহিত যোগ ও বিয়োগ করিয়া,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = \frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} - \frac{a}{a-b}.$$

এখন, $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a(a+b)+(a-b)a}{a^2-b^2} = \dfrac{2a^2}{a^2-b^2}.$

আবার, $\dfrac{2a^2}{a^2-b^2} + \dfrac{2a^2}{a^2+b^2} = \dfrac{2a^2(a^2+b^2)+2a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^4}{a^4-b^4}$;

এবং $\dfrac{4a^4}{a^4-b^4} + \dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^4+4a^2b^2}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^2(a^2+b^2)}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^2}{a^2-b^2}$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{4a^2}{a^2-b^2} - \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{4a^2-a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{3a^2-ab}{a^2-b^2} = \dfrac{a(3a-b)}{a^2-b^2}.$

প্রশ্নমালা 89

সরল কর :

1. $\dfrac{x}{3x-y} + \dfrac{x}{3x+y} + \dfrac{6x^2}{9x^2+y^2}.$

2. $\dfrac{1}{x-3a} - \dfrac{1}{2x+6a} - \dfrac{x-9a}{2x^2+18a^2}.$

3. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2} - \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} - 2.$

4. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$.

5. $\frac{1}{x-a}-\frac{2}{2x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{2x-a}$.

6. $\frac{3}{a-x}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a+x}+\frac{1}{x-3a}$.

7. $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{1-x^2}$.

8. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

9. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x^2-8x+15}$.

10. $\frac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

11. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$.

12. $\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

$\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{2x}{1-x^2+x^4}$.

14. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}+\frac{6x}{x^3+8}$.

$\frac{1}{2x^2-6ax+9a^2}-\frac{1}{2x^2+6ax+9a^2}+\frac{12ax}{4x^4-81a^4}$.

16. $\frac{1}{(x+a)(x+2a)}+\frac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\frac{1}{(x+3a)(x+4a)}$.

17. $\frac{a-b}{(x+a)(x+b)}+\frac{b-c}{(x+b)(x+c)}+\frac{c-d}{(x+c)(x+d)}$.

18. $\frac{1}{a^2-3a+2}+\frac{2}{a^2-5a+6}+\frac{3}{a^2-4a+3}$.

19. $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+2}$. [এলাহাবাদ, 1912.]

20. $\frac{2(x-3)}{(x-4)(x-5)}-\frac{x-1}{(x-3)(x-4)}-\frac{x-2}{(x-5)(x-3)}$. [এলাহাবাদ, 1911.]

21. $\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}-\frac{16}{1-a^{16}}$.

22. $\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\frac{x^2}{a(a+x)}$.

[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1876.]

23. $\frac{\text{[illegible]}}{(a-b)(a-c)}+\frac{\text{[illegible]}}{(b-a)(b-c)}+\frac{\text{[illegible]}}{(c-a)(c-b)}$.

24. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$.

25. $1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}+\frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$+\frac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$.

III. দুরূহ (Complex), এবং ধারাবাহিক বা ক্রমিক (Continued) ভগ্নাংশ

167. দুরূহ বা জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fractions) : যে ভগ্নাংশের হর ও লবের একটি বা উভয়ই ভগ্নাংশ, তাহাকে **দুরূহ** বা **জটিল ভগ্নাংশ** বলে। যথা,

$\frac{\frac{x}{y}}{z}$, $\frac{x}{\frac{y}{z}}$, $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}}$ ইত্যাদির প্রত্যেকটি দুরূহ বা জটিল ভগ্নাংশ। স্পষ্টতঃ, ইহারা ভগ্নাংশের ভাগবিশেষ।

এই প্রকার ভগ্নাংশের সরলীকরণ-প্রণালী 111 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

168. ধারাবাহিক বা ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fractions) :

$x+\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\text{ইত্যাদি}}}}$ বা $\cfrac{x}{y+\cfrac{z}{u+\cfrac{v}{w+\text{ইত্যাদি}}}}$, এই জাতীয় ভগ্নাংশকে **ধারাবাহিক** বা **ক্রমিক ভগ্নাংশ** বলে।

এইরূপ ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে, পাটীগণিতের ন্যায়, সর্ব্বনিম্ন অংশ হইতে সরলীকরণ-প্রক্রিয়া আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $-1+\cfrac{}{2(a+b)-\cfrac{a+b}{1-\cfrac{b}{a+b}}}$

যেহেতু, $1-\frac{b}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$, অতএব, সর্ব্বনিম্ন রাশি হইতে সরল করিতে আরম্ভ করিয়া,

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = -1 + \cfrac{a}{2(a+b) - \cfrac{a+b}{\cfrac{a}{a+b}}} = -1 + \cfrac{a}{2(a+b) - \cfrac{(a+b)^2}{a}}$$

$$= -1 + \cfrac{a}{\cfrac{2a^2 + 2ab - (a^2 + 2ab + b^2)}{a}}$$

$$= -1 + \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{-a^2 + b^2 + a^2}{a^2 - b^2} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

উদা. 2. সরল করঃ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$$

প্রথম উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়ম অনুসারে,

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1+x}{x}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+x}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1+x+x}{1+x}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1+x}{1+2x}} = \cfrac{1}{\cfrac{1+2x+1+x}{1+2x}} = \frac{1+2x}{2+3x}.$$

উদা. 3. সমাধান করঃ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} = \frac{3}{4}.$$

উদা. 2 এ লব্ধ ফল লইয়া,

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{1+2x}{2+3x} = \frac{3}{4},$$

অথবা, $3(2+3x) = 4(1+2x)$; অথবা, $6 + 9x = 4 + 8x$;

অথবা, $9x - 8x = 4 - 6,$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $x = -2.$

প্রশ্নমালা 90

সরল কর :

1. $$\frac{\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)}.$$ [বোম্বাই প্রবেশিকা, 1926.]

2. $$\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+3}.$$

3. $$\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}}{\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}-(a+b+c)}.$$

4. $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\times\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1921.]

5. $$\frac{1}{1+\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}}}$$

6. $$\frac{1}{1+\frac{1}{a+x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a+x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a^2+x^2}}$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1870.]

7. $$\frac{\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}.$$

8. $$\frac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)}\times\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}.$$

9. $$\frac{\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2(x-3)}}{\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}}.$$

10. $$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}}.$$

11. $$b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}$$

12. $$\frac{\quad}{x-\frac{x-1}{1-\frac{1}{x+1}}}.$$

13. $a^2 + \cfrac{}{a^2 - \cfrac{a^3+b^3}{a+\cfrac{b^2}{a-b}}}$.

14. $\cfrac{m}{m^2 - \cfrac{m^3-1}{m+\cfrac{}{m+1}}}$.

15. $\cfrac{x^2-2xy+y^2}{\cfrac{x+y}{x+y-\cfrac{(x-y)^2}{x+y}}-1}$.

16. $\cfrac{x^2(x+2)}{4x+8+\cfrac{2x^4-32}{x+2+\cfrac{(x-2)(x-2)}{x+2}}}$

সমাধান কর :

17. $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{x+1}{2-x}}} = \frac{4}{3}$.

18. $\cfrac{2x}{1+\cfrac{}{1+\cfrac{}{1-}}} = 1$.

19. $1+\cfrac{}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}} = \frac{13}{9}$.

20. $\cfrac{}{a+\cfrac{}{a+}} = \frac{2}{3}$.

169. চক্র-ক্রম (Cyclic order)-বিশিষ্ট ভগ্নাংশ : ভগ্নাংশের অন্তর্গত অক্ষরসমূহ চক্র-ক্রমে (in cyclic order) থাকিলে, উহাদিগকে সহজে সরল করা যায়।

সরল কর : $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

প্রথম পদের হরে (denominator এ) দেখা যায় যে, $a-c$ এর অক্ষরদ্বয় চক্র-ক্রমে নাই। কিন্তু,

যেহেতু, $a-c=-(c-a)$, অতএব, $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$.

অতএব, প্রথম ভগ্নাংশ $= -\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}$;

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $= -\dfrac{ca}{(b-c)(a-b)}$;

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ $= -\dfrac{ab}{(c-a)(b-c)}$;

হর তিনটির ল. সা. গু. $=(b-c)(c-a)(a-b)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= -\left[\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ca}{(b-c)(a-b)}+\frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right]$

$$= -\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1.$$

170. চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় কয়েকটি বিশেষ ফল : চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সবল করিতে নিম্নলিখিত সহজসিদ্ধ ফলগুলি অত্যন্ত উপযোগী।

যদি $\frac{1}{(a-b)(a-c)}=X$, $\frac{1}{(b-c)(b-a)}=Y$ এবং $\frac{1}{(c-a)(c-b)}=Z$ হয়,

তবে, (i) $X+Y+Z=0$, (ii) $aX+bY+cZ=0$;

(iii) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$; (iv) $bcX+caY+abZ=1$;

(v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$;

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab.$

উদা. 1. সবল কর : $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

প্রদত্ত রাশি $=(a^2-bc)X+(b^2-ca)Y+(c^2-ab)Z$,

[উপরোক্ত সঙ্কেত অনুসারে]

$=a^2X+b^2Y+c^2Z-(bcX+caY+abZ)$,

$=1-1=0.$ [(iii) এবং (iv) এর ফল হইতে]

উদা. 2. সবল কর :

$$\frac{pa^3+qa^2bc+ra}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^3+qab^2c+rb}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^3+qabc^2+rc}{(c-a)(c-b)}.$$

প্রদত্ত রাশি

$=(pa^3+qa^2bc+ra)X+(pb^3+qab^2c+rb)Y+(pc^3+qabc^2+rc)Z$,

[উপরোক্ত সঙ্কেত অনুসারে]

$=p(a^3X+b^3Y+c^3Z)+qabc(aX+bY+cZ)+r(aX+bY+cZ)$

$=p(a+b+c)+qabc.0+r.0=p(a+b+c).$

উদা. 3. দেখাও যে,

$$\frac{1}{(l-m)(l-n)(x+l)}+\frac{1}{(m-n)(m-l)(x+m)}+\frac{1}{(n-l)(n-m)(x+n)}$$

$$=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}.$$

$x+l$ এর পরিবর্তে a, $x+m$ এর পরিবর্তে b, $x+n$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া,

$a-b=l-m$, $a-c=l-n$, $b-c=m-n$, প্রভৃতি,

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{abc}\left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right]$$

$$=\frac{1}{abc}(bcX+caY+abZ)$$

$$=\frac{1}{abc}=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}.$$

[a, b, c এর মান পুনরায় বসাইয়া]

171. ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় অভেদাবলী (Fractional Identities) :

বিবিধ উদাহরণ :

উদা. 1. দেখাও যে, $\dfrac{x}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^2}{x^3}+\dfrac{a^4}{x^5}-\dfrac{a^6}{x^7}+\dfrac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}.$

x কে x^2+a^2 দ্বারা ভাগ করা যাউক :

$$
\begin{array}{l}
x^2+a^2)\,x\,\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^2}{x^3}+\dfrac{a^4}{x^5}-\dfrac{a^6}{x^7}\right. \\
\qquad\quad x+\dfrac{a^2}{x} \\
\qquad\quad\quad -\dfrac{a^2}{x} \\
\qquad\quad\quad -\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{a^4}{x^3} \\
\qquad\qquad\qquad \dfrac{a^4}{x^3} \\
\qquad\qquad\qquad \dfrac{a^4}{x^3}+\dfrac{a^6}{x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\dfrac{a^6}{x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\dfrac{a^6}{x^5}-\dfrac{a^8}{x^7} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dfrac{a^8}{x^7}
\end{array}
$$

অতএব, ভাগ-কার্য্যে আর অগ্রসর না হইয়া, এখন,

$$\frac{x}{x^2+a^2}=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{\left(\frac{a^8}{x^7}\right)}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}$$

উদা. 2. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কলিঃ, 1865]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\left(\frac{x+2a}{x-2a}-1\right)+\left(\frac{x+2b}{x-2b}-1\right)+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{a(x-2b)+b(x-2a)\}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{(a+b)x-4ab\}+2$$

$$=0+2 \qquad [\because (a+b)x=4ab.]$$

$$=2$$

উদা. 3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$$

যেহেতু, $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}$,

$\therefore \quad (a+b+c)(bc+ca+ab)=abc,$

অথবা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$

অথবা, $(b+c)(c+a)(a+b)=0$,

$\therefore$ উৎপাদকগুলির যে কোন একটি, ধর, $b+c=0$

অতএব, $b=-c$, $\therefore$ $b^7=(-c)^7=-c^7$, অথবা, $b^7+c^7=0$.

আবার, যেহেতু $b=-c$, $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$, $\therefore$ $\frac{1}{b^7}=\left(-\frac{1}{c}\right)^7=-\frac{1}{c^7}$

সুতরাং, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}-\frac{1}{c^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}$,

$[\because \; b+c=0.]$

এইরূপে, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}.$ $[\because\ b^7+c^7=0.]$

অতএব, অভেদটি প্রতিপন্ন হইল।

উদা. 4. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর :

$$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$$ [কলিঃ, 1866.]

এখন, প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}}{\{(x+z)+y\}\{(x+z)-y\}}$

$$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+z+y)(x+z-y)}=\frac{x+y-z}{x+y+z}.$$

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(y+x-z)(y-x+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{y-x+z}{x+y+z},$

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(z+x-y)(z-x+y)}{(y+z+x)(y+z-x)}=\frac{z+x-y}{x+y+z}.$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\frac{(x+y-z)+(y-x+z)+(z+x-y)}{x+y+z}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1.$

উদা. 5. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$$

যেহেতু, $x+y+z=xyz,$ অতএব, $y+z=xyz-x=x(yz-1).$

সুতরাং, $\frac{y+z}{1-yz}=\frac{x(yz-1)}{1-yz}=-x.$

এইরূপে, $\frac{z+x}{1-zx}=-y$ এবং $\frac{x+y}{1-xy}=-z.$

বাম পক্ষ $=\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}$

$$=-x-y-z=-(x+y+z)=-xyz$$

$$=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$$

উদা. 6. দেখাও যে, $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$ [কলিঃ, 1867.]

এখন,

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=4+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)$$

$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{bc}{b^2}+\frac{bc}{c^2}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{bc}\right)$$

$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right);$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)\right\}$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a^2}{bc}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\frac{b}{a}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{a}{b}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

7. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

এখন, $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}=\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}=\frac{}{(s-a)(s-b)}$,

এবং $\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}=\frac{c}{s(s-c)}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}=c.\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=c.\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

[$\because$ $2s^2-s(a+b+c)$
$=2s^2-2s^2=0.$]

উদা. 8. দেখাও যে,

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$$
$$=2(a+b+c).$$

$a^2+b^2+c^2$ এর পরিবর্তে $2s^2$ বসাইয়া,

$$a^2+b^2-c^2=(a^2+b^2+c^2)-2c^2=2(s^2-c^2),$$
$$b^2+c^2-a^2=(a^2+b^2+c^2)-2a^2=2(s^2-a^2),$$
$$c^2+a^2-b^2=(a^2+b^2+c^2)-2b^2=2(s^2-b^2).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(s^2-c^2\right)+2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(s^2-a^2\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(s^2-b^2\right)$$
$$=2\left\{\frac{1}{a}\left(2s^2-b^2-c^2\right)+\frac{1}{b}\left(2s^2-c^2-a^2\right)+\frac{1}{c}\left(2s^2-a^2-b^2\right)\right\}$$
$$=2\left\{\frac{1}{a}\cdot a^2+\frac{1}{b}\cdot b^2+\frac{1}{c}\cdot c^2\right\}=2(a+b+c).$$

উদা. 9. দেখাও যে, $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2}{a^4-1}+\dfrac{a^4}{a^8-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a^8+1}{a^8-1}\right).$

$$\frac{a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)^2-(a^2+1)}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right);$$
$$\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+1)^2-(a^4+1)}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right);$$
$$\frac{a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^4+1)^2-(a^8+1)}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)+\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right)+\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right)\right\};$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right\}.$$

উদা. 10. দেখাও যে,

$$bc.\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}+ac.\frac{b+d}{(b-a)(b-c)}+ab.\frac{c+d}{(c-a)(c-b)}=d.$$

যেহেতু, $b-a=-(a-b),$

এবং $(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\times[-(b-c)]=(a-c)(b-c)$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= bc.\dfrac{a+d}{(a-b)(a-c)} + ac.\dfrac{-(b+d)}{(a-b)(b-c)} + ab.\dfrac{c+d}{(a-c)(b-c)}$

$$= \frac{bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

এখন, লব $= abc\{(b-c)-(a-c)+(a-b)\}$

$\qquad + d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$

$= d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$

$= d\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$

$= d(a-b)(a-c)(b-c).$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= d.$

উদা. 11. সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x+b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{-b^2}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)(x+c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c) - b^2(a-c)(x+c)(x+a) + c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(a-c)(b-c)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

এখন, লব $= a^2(b-c)\{x^2 + x(b+c) + bc\} + b^2(c-a)\{x^2 + x(c+a) + ca\}$

$\qquad + c^2(a-b)\{x^2 + x(a+b) + ab\}$

$= x^2\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\} + x\{a^2(b^2-c^2)$

$+ b^2(c^2-a^2) + c^2(a^2-b^2)\} + abc\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}$

$= x^2\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$

$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$

উদা. 12. সরল কর : $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{-b^3}{(b-c)(a-b)} + \dfrac{c^3}{(a-c)(b-c)}$

$$= \frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

এখন, লব $= a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= a+b+c.$

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative Method) **:***

যেহেতু, $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}$,

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি

$$=\left\{\frac{a^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3}{(a-c)(b-c)}\right\}+\frac{-b^3}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3-c^3}{(a-c)(b-c)}=\frac{a^2+ab+b^2}{b-c}-\frac{a^2+ac+c^2}{b-c}$$

$$=\frac{a(b-c)+(b^2-c^2)}{b-c}=a+b+c.$$

উদা. 13. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{bc}-\dfrac{1}{ca}-\dfrac{1}{ab}=0$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $a=b=c.$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0.$$

অথবা. $\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2\right\}=0.$

[সূত্র XXIV, নিয়ম 133]

এখন, যেহেতু বামদিকের পদগুলির কোনটিই ঋণরাশি নহে, অতএব, উহাদের প্রত্যেকটিরই মান শূন্য না হইলে উহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

অতএব, $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0$; $\quad\therefore\ b=c,$

$\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=0$; $\quad\therefore\ c=a,$

এবং $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=0$; $\quad\therefore\ a=b.$

সুতরাং $a=b=c.$

---

* এই পদ্ধতি আমার বন্ধু এবং প্রিয় ছাত্র বাবু বিমলাচরণ সোম (হেড্ এসিষ্টাণ্ট, ফরেষ্ট সার্ভে, দেরাদুন) এর সৌজন্যে প্রাপ্ত।

প্রশ্নমালা 91

1. প্রমাণ কর : $\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}$
$$=\frac{3}{x}-\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}-\frac{1}{c+x}.$$ [বোম্বাই, 1920.]

2. $yz+zx+xy=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3.$$

3. $abc=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+(b+c)(c+a)(a+b).$$

4. $bc+ca+ab=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

5. $x+y+z=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{x+yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3.$$

6. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

7. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

8. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

প্রমাণ কর :

9. $$\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=3.$$

10. $$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$$

11. $\dfrac{x^6}{x^2+y^2}=x^4-x^2y^2+y^4-\dfrac{y^6}{x^2+y^2}$.

12. $\dfrac{x^6}{x^2-y^2}=x^4+x^2y^2+y^4+\dfrac{y^6}{x^2-y^2}$.

13. $\dfrac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{x^2y^2z^2}=\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}$.

14. $\dfrac{xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2}{x^2y^2z^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

15. $\dfrac{3a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\dfrac{1}{(a-2)(a-3)}+\dfrac{1}{(a-3)(a-1)}+\dfrac{1}{(a-1)(a-2)}$.

16. $\dfrac{3x^2-14}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$=\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}+\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}+\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}.$$

17. $\dfrac{1-x}{1+x}=1-2x+2x^2-2x^3+\dfrac{2x^4}{1+x}$.

18. $\dfrac{a}{x^2-a^2}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{a^3}{x^4}+\dfrac{a^5}{x^6}+\dfrac{a^7}{x^6(x^2-a^2)}$.

19. $\dfrac{a^3}{x^3+a^3}=\dfrac{a^3}{x^3}-\dfrac{a^6}{x^6}+\dfrac{a^9}{x^9}-\dfrac{a^{12}}{x^9(x^3+a^3)}$

$$=1-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^6}{a^6}-\frac{x^9}{a^9}+\frac{x^{12}}{a^9(x^3+a^3)}.$$

20. $\dfrac{x^4-1}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3+\dfrac{a^4-1}{x+a}$.

21. $x=\dfrac{ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

22. $x=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3=\frac{6abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

23. $x=\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{b+2x}{b-2x}+\frac{c+2x}{c-2x}+3=\frac{6abc}{(a-2x)(b-2x)(c-2x)}.$$

24. $x = \dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$ হইলে, $\dfrac{x^2-(b+c)x}{(x-b)(x-c)} + \dfrac{x^2-(c+a)x}{(x-c)(x-a)} + \dfrac{x^2-(a+b)x}{(x-a)(x-b)}$ এর মান নির্ণয় কর।

25. $x = \dfrac{a-b}{a+b}$ এবং $y = \dfrac{a+b}{a-b}$ হইলে, $\dfrac{x^2-y^2+x}{y^2-x^2+y}$ এর মান নির্ণয় কর।

[প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x(x+1)-y^2}{y(y+1)-x^2} =$ প্রভৃতি।] [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

26. $x^2 = a^2 + b^2$ হইলে,

$\dfrac{x^4+3abx^2-10a^2b^2}{x^4+7abx^2+10a^2b^2} \times \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

27. $x = a+b$ এবং $y = a-b$ হইলে,

$\dfrac{x^2y^2+3(2x^2-y^2)ab-18a^2b^2}{y^4+9aby^2+18a^2b^2} \times \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

28. $x = a+b$ এবং $y = a-b$ হইলে,

$\dfrac{x^4+abx^2-2a^2b^2}{x^2y^2+(x^2+2y^2)ab+2a^2b^2} - \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সরল কর :

29. $\dfrac{x^9}{x^3+1} + \dfrac{x^6}{x^3-1} + \dfrac{1}{x^3+1} - \dfrac{1}{x^3-1}$.

30. $\dfrac{x^2-(a-b)^2}{(x+b)^2-a^2} + \dfrac{a^2-(x-b)^2}{(x+a)^2-b^2} + \dfrac{b^2-(x-a)^2}{(a+b)^2-x^2}$.

31. $\dfrac{(a+2b)^2-b^2}{(a+b)^2-4b^2} + \dfrac{(a-b)^2-4b^2}{(a-2b)^2-b^2} + \dfrac{(2a+3b)^2-b}{(2a+b)^2-9b}$

32. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

33. $2s = a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2(s-a)(s-b)}{ab}.$$

সরল কর :

34. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2} + \dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

35. $\dfrac{a+b}{2ab}(a+b-c) + \dfrac{b+c}{2bc}(b+c-a) + \dfrac{c+a}{2ca}(c+a-b)$.

36. $\frac{x+y}{2xy}(x^2+y^2-z^2)+\frac{y+z}{2yz}(y^2+z^2-x^2)+\frac{z+x}{2zx}(z^2+x^2-y^2)$.

37. $\frac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)+\frac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\frac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3)$.

38. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$ এবং $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ হইলে, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$ এর মান লঘিষ্ঠ আকারে নির্ণয় কর।

39. $p=\frac{a-b}{x-c}$, $q=\frac{b-c}{x-a}$, $r=\frac{c-a}{x-b}$ হইলে, $p+q+r+pqr$ এর মান নির্ণয় কর।

40. দেখাও যে, $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$.

41. দেখাও যে, $\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}=\frac{1}{1-x}-\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$.

সরল কর :

42. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

43. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$. [এলাহাবাদ, 1925.]

44. $\frac{x^2+yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+zx}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z-y)}$.

45. $\frac{2a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

46. $\frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865.]

47. $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1872.]

48. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

49. $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

50. $\dfrac{}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$

51. $\dfrac{a^2+ha+k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2+hb+k}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c^2+hc+k}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$

52. দেখাও যে, $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c.$

53. দেখাও যে, $\dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca.$

54. দেখাও যে,

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

55. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}=\frac{}{abc}.$$

56. সরল কর : $\dfrac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}.$

বিবিধ প্রশ্নমালা V

I

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(i) $(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)$;

(ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15.$

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $7(z+x)^3-(x-y)^3-(y+z)^3.$

3. সরল কর : $(a-b)^2(a+b-2c)^2+(b-c)^2(b+c-2a)^2$
$+(c-a)^2(c+a-2b)^2$, যখন $a+b+c=0.$

4. $x+y+z=4xyz$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x}{1-4x^2}+\frac{y}{1-4y^2}+\frac{z}{1-4z^2}=\frac{16xyz}{(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)}.$$

5. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$$1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

6. দেখাও যে, $\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$

$$+\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab}=a+b+c.$$

7. $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$ হইলে,

$\frac{qr}{(a-q)(a-r)}+\frac{rp}{(a-r)(a-p)}+\frac{pq}{(a-p)(a-q)}$ এর মান নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে, $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$ কে x^2-y^2, y^2-z^2 এবং z^2-x^2 এর প্রত্যেকটি দ্বারাই ভাগ করা যায়।

II

1. $x+y+z=15$ এবং $xy+yz+zx=75$ হইলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে, $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$

$$=3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b).$$

3. দেখাও যে, $(b-c)(b+c-2a)^2+(c-a)(c+a-2b)^2$

$$+(a-b)(a+b-2c)^2=9(a-b)(b-c)(a-c).$$

4. সরল কর : $\frac{1}{bc(b-a)(c-a)}+\frac{1}{ca(c-b)(a-b)}+\frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$.

5. $x=\frac{b}{a-b}$ এবং $y=\frac{a}{a+b}$ হইলে, $\frac{y}{x}+\frac{y-1}{x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $ab+2a^2-3b^2-4bc-ac-c^2$ এবং $9ac+2a^2-5ab+4c^2+8bc-12b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. $6x^3-11x^2+5x-3$ এবং $9x^3-9x^2+5x-2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c).$$

III

1. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^5$ কে x এর অধঃক্রমিক শক্তিতে বিস্তার কর।

2. দেখাও যে, $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

অতএব, প্রমাণ কর যে,

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$$

3. $a=\cdot4278$, $b=1\cdot2345$ এবং $c=\cdot8067$ হইলে, $a^3-b^3+c^3+3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে, $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$=(a-b)(a-c)(b-c)$.

5. $6x^3-25x^2+23x-6$, $2x^2-7x+3$ এবং $6x^2-7x+2$ এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. $x^5+11x-12$ এবং x^5+11x^3+54 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. সরল কর : $\dfrac{a^3(b+c)}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{b^3(c+a)}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{c^3(a+b)}{(a-c)(b-c)}$.

8. দেখাও যে, $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে $b-c$, $c-a$ এবং $a-b$ এর প্রত্যেকটি দ্বারা যথাযথরূপে ভাগ করা যায়।

IV

1. $a+b=2$ এবং $ab=7$ হইলে, a^5+b^5 এর মান নির্ণয় কর।

2. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$ কে পাঁচটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

3. $a=2658$, $b=2664$ এবং $c=2678$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

5. $x=\dfrac{a}{a+b}$ এবং $y=\dfrac{b}{a-b}$ হইলে, $\dfrac{2x^2+5xy+3y^2}{2x^2+xy-3y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে, $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

7. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$ এবং $x^2-8xy+15y^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর ; এবং নির্ণীত ল. সা. গু. কে, উক্ত রাশিগুলির গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

8. $x=15$ হইলে, x এর মান সোজাসুজি না বসাইয়া, অন্য উপায়ে, $x^5-18x^4+47x^3-31x^2+19x-60$ এর মান নির্ণয় কর।

1. $x=\dfrac{a-b}{m-c}$, $y=\dfrac{b-c}{m-a}$ এবং $z=\dfrac{c-a}{m-b}$ হইলে,
দেখাও যে, $x+y+z+xyz=0$.

2. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{b}{c}+\dfrac{d}{a}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{c^3}{d^3}=\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{d^3}{a^3}$.

3. $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-a-b)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $x=\dfrac{2ac}{a+c}$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{(x-a)^2+(x-c)^2}{a^2+c^2}+\dfrac{4ac}{(a+c)^2}$ এর মান, a ও c এর যে কোন মানের জন্য সর্ব্বদা একই থাকিবে।

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $6a^4+43a^3b-56a^2b^2+43ab^3+6b^4$;

(ii) $12x^4-37x^3+45x^2-37x+12$;

(iii) $abx^4+(ac+b^2)x^3+(2ab+bc)x^2+(ac+b^2)x+ab$.

6. দেখাও যে, $(x+y)^3-(y+z)^3+(z-x)^3=3(x+y)(y+z)(x-z)$.

7. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq$ এবং $x^3+ax^2-3a^2x+a^3$;

(ii) $x^3-y^3-z^3-3xyz$ এবং $x^2-2xy+y^2-2xz+2yz+z^2$.

8. x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে 'a' বসাইলে যদি উহার মান শূন্য হয়, তবে দেখাও যে, $x-a$ উক্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

VI

1. দেখাও যে,

$$(a^2-a+1)(b-c)+(b^2-b+1)(c-a)+(c^2-c+1)(a-b)$$
$$=(a^2-a+1)(b^2-c^2)+(b^2-b+1)(c^2-a^2)+(c^2-c+1)(a^2-b^2).$$

2. $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{ab}{(x-a)(x-b)}+\frac{bc}{(x-b)(x-c)}+\frac{ca}{(x-c)(x-a)}=0.$$

3. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0.$

4. $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2-2(x+y)^2z^2$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর

5. সরল কর :

$$\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\Bigg\}\cdot\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$$

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $x^3+(5m-3)x^2+3m(2m-5)x-18m^2$ এবং $x^3+(m-3)x^2-m(2m+3)x+6m^2$.

(ii) $10x^3-54x^2+87x-45$ এবং $5x^4-36x^3+87x^2-90x+54$.

7. $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$ এবং $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. প্রকৃত ভাগ না করিয়া দেখাও যে, $x^{55}-y^{55}$, $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য ; এবং উহাকে $x+y$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগশেষ $-2y^{55}$ হইবে।

VII

1. $1+x+y$, $1-x+y$, $1+x-y$ এবং $x+y-1$ এর ক্রমিক গুণফলকে $1+2xy-x^2-y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

2. সরল কর : $\frac{bc(x-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x-c)}{(c-a)(c-b)}$.

[কলিঃ, 1896.]

3. প্রমাণ কর যে, $2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$
$=\{(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2$.

4. নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর :

(i) $\frac{a^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-b}+\frac{b^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-a}$; (ii) $\frac{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1+x}{1-x}}$.

5. p এবং q এর সাংখ্যমান নির্ণয় করিয়া, $41x^2 - 60xy + 104y^2$ কে $(px+qy)^2 + 4(qx-py)^2$ এর আকারে প্রকাশ কর।

6. $6x^3 - 17x^2 + 11x - 2$ এবং $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ এর ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $(a+b)(m^2+n^2) + am(n-3m) + bn(m-3n)$ এর একটি গুণনীয়ক $m-n$. a এর মান কত হইলে, x^3+5x+a, $x-3$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

8. n একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $3^{2n+1} + 2^{2n+1}$ এর সাংখ্যমানের এককস্থানীয় অঙ্কটি 5 হইবে।

VIII

1. দেখাও যে, $$(a-b)(x-a)(x-b) + (b-c)(x-b)(x-c) + (c-a)(x-c)(x-a) = (a-b)(b-c)(a-c).$$

2. দেখাও যে, $$4(a^2+ab+b^2)^3 - (a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2 = 27a^2b^2(a+b)^2.$$

3. $2s = a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $$16s(s-a)(s-b)(s-c) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1867.]

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
$$(a^2-b^2)^2 + (c^2-d^2)^2 - (a+b)^2(c-d)^2 - (a-b)^2(c+d)^2.$$

5. সরল কর: $$\frac{(y-z)(y+z)^3 + (z-x)(z+x)^3 + (x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3 + (z+x)(z-x)^3 + (x+y)(x-y)^3}.$$

6. সরল কর: $$\frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}.$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1865.]

7. n একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $2^{4n}-1$, 15 দ্বারা বিভাজ্য।

8. x^4+2x^2+1, $x^6+x^4-x^2-1$ এবং x^4-1 এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

ষড়্‌বিংশ অধ্যায়

সরল সমীকরণ ও তৎসম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী

(Simple Equations and Problems)

I. সরল সমীকরণ (Simple Equations)

172. সহজ 'সরল সমীকরণ' সমাধান করিবার প্রণালী পূর্ব্বে পঞ্চম ও সপ্তদশ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ বিষয় বিস্তৃতরূপে আলোচনা করা যাইবে।

173. সুবিধাজনকভাবে পদসংযোগ ও পক্ষান্তরকরণ দ্বারা সমীকরণ সমাধান :

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $4(x+1)^2+9(x+2)^2=13(x+3)^2$.

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$4(x^2+2x+1)+9(x^2+4x+4)=13(x^2+6x+9),$$

অথবা, $$13x^2+44x+40=13x^2+78x+117;$$

অথবা, $13x^2+44x-13x^2-78x=117-40,$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অর্থাৎ, $-34x=77$; $\therefore\ x=-\frac{77}{34}=-2\frac{9}{34}$.

উদা. 2. সমাধান কর : $(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3$
$=3(x-2)(x-6)(x-10)$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3-3(x-2)(x-6)(x-10)=0;$$

অথবা, $\frac{1}{2}\{(x-2)+(x-6)+(x-10)\}[\{(x-6)-(x-10)\}^2$
$+\{(x-10)-(x-2)\}^2+\{(x-2)-(x-6)\}^2]=0;$

[বাম পক্ষকে, নিয়ম 134 দ্বারা, উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

অথবা, $\frac{1}{2}(3x-18)\{(10-6)^2+(-10+2)^2+(-2+6)^2\}=0;$

অথবা, $\frac{1}{2}(3x-18).96=0$; $\therefore\ 3x-18=0$; অথবা, $x=6$.

174. ভগ্নাংশ-সমন্বিত সমীকরণ :

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{7x-11}{6}=\dfrac{31x-41}{24}-\dfrac{7x^2-4}{56x-47}$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{7x^2-4}{56x-47}=\dfrac{31x-41}{24}-\dfrac{7x-11}{6}$

$$=\frac{(31x-41)-(28x-44)}{24}=\frac{3(x+1)}{24}=\frac{x+1}{8}.$$

উভয় পক্ষকে $8(56x-47)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$8(7x^2-4)=(x+1)(56x-47),$$

অথবা, $56x^2-32=56x^2+9x-47$; $\therefore\ -32=9x-47.$

সুতরাং, $9x=-32+47=15$; $\therefore\ x=\frac{15}{9}=1\frac{2}{3}.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\dfrac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=\dfrac{23}{x+1}+5.$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}-5=\frac{23}{x+1}-\frac{25-\frac{1}{3}x}{x+1},\quad \text{অথবা,}\quad \frac{x-5\frac{4}{5}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}x-2}{x+1}.$$

অতএব, $(x-5\frac{4}{5})(x+1)=(\frac{1}{3}x-2)(3x+2),$

অথবা, $x^2-(4\frac{4}{5})x-5\frac{4}{5}=x^2-(5\frac{1}{3})x-4.$

সুতরাং, $(5\frac{1}{3}-4\frac{4}{5})x=5\frac{4}{5}-4,$

অথবা, $\frac{8}{15}x=1\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$; $\therefore\ x=\frac{9}{5}\times\frac{15}{8}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}.$

উদা. 5. সমাধান কর : $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x-6}=\dfrac{8}{x+3}.$

যেহেতু, $\dfrac{8}{x+3}=\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{5}{x+3},$

অতএব, $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x-6}=\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{5}{x+3}.$

সুতরাং, পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{5}{x-6}.$

অথবা, $\dfrac{15}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{-45}{(x+3)(x-6)},$

উভয় পক্ষকেই $x+3$ দ্বারা গুণ এবং 15 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{x-2}=\frac{-3}{x-6}.$$

সুতরাং, $x-6=-3(x-2)$; $\therefore\ 4x=12$, অথবা, $x=3.$

|. 6. সমাধান কর : $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{7}{x+1}$.

এখন, $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x+1}$.

অতএব, $\left\{\frac{8}{2x-1}-\frac{4}{x+1}\right\}+\left\{\frac{9}{3x-1}-\frac{3}{x+1}\right\}=0.$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $\frac{12}{(2x-1)(x+1)}+\frac{12}{(3x-1)(x+1)}=0.$

সুতরাং, $\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}=0.$

উভয় পক্ষকেই $(2x-1)(3x-1)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(3x-1)+(2x-1)=0.$$

$\therefore\ 5x=2,$ অথবা, $x=\frac{2}{5}$.

উদা. 7. সমাধান কর : $\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{a+b-2c}{a+b+x}$.

এখন, $\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{(a-c)+(b-c)}{a+b+x}=\frac{a-c}{a+b+x}+\frac{b-c}{a+b+x}$.

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(a-c)\left\{\frac{1}{2b+x}-\frac{1}{a+b+x}\right\}=(b-c)\left\{\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{2a+x}\right\}.$$

অথবা, $(a-c)\cdot\frac{a-b}{(2b+x)(a+b+x)}=(b-c)\cdot\frac{a-b}{(a+b+x)(2a+x)}$.

সুতরাং, $\frac{a-c}{2b+x}=\frac{b-c}{2a+x}$;

$\therefore\ (a-c)(2a+x)=(b-c)(2b+x)$;

$\therefore\ x\{(a-c)-(b-c)\}=2b(b-c)-2a(a-c),$

অথবা, $x(a-b)=2(b^2-a^2)-2c(b-a)$

$=2(b-a)(b+a-c)$

$=2(a-b)(c-a-b)$;

$\therefore\ x=2(c-a-b).$

প্রশ্নমালা 92

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $3(x+1)^2 + 4(x+3)^2 = 7(x+2)^2$.

2. $(x-a)(x-b) = (x-a-b)^2$.

3. $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$.

4. $(x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2 = (x-2a)^2 + (x-2b)^2 + (x-2c)^2$.

5. $\frac{98x-73}{21} = \frac{14x-9}{3} - \frac{13x-16}{15x-9}$.

6. $\frac{95x-159}{35} = \frac{19x-29}{7} - \frac{17x-47}{23x-59}$.

7. $\frac{91x-21}{56} + \frac{24x-93}{35x-138} = \frac{13x+9}{8}$.

8. $\frac{117x-26}{135} + \frac{16x-77}{23x-110} = \frac{13x+4}{15} + \frac{3\frac{4}{5}}{27}$.

9. $\frac{6x-7\frac{1}{3}}{13-2x} + 2x + \frac{1+16x}{24} = 4\frac{5}{12} - 12\frac{5}{8} - 8x$

10. $\frac{2x+8\frac{1}{2}}{9} \quad \frac{13x-2}{17x-32} + \frac{x}{3} = \frac{7x}{12} - \frac{x+16}{36}$.

11. $\frac{41-35x}{105} - \frac{7-2x^2}{14(x-1)} = \frac{1+3x}{21} - \frac{2x-2\frac{1}{5}}{6}$.

12. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+7} = \frac{1}{7(x-1)}$.

13. $\frac{2}{5(3x+4)} + \frac{4}{2x+3} = \frac{6}{3x+4}$.

14. $\frac{}{3x-5} - \frac{6}{7(4x-7)} = \frac{7}{9(3x-5)} + \frac{}{4x-7}$.

15. $\frac{11}{12(14x-19)} + \frac{}{9(13x-14)} = \frac{}{14x-19} - \frac{}{13x-14}$.

16. $\frac{50}{3x-1} + \frac{37-\frac{1}{3}x}{12x-1} = \frac{35}{12x-1} + \frac{49-\frac{1}{12}x}{3x-1}$.

17. $\frac{(1\frac{3}{7})x + 19\frac{13}{17}}{2x+5} - \frac{\frac{7}{9}x+8}{x+8} = \frac{20\frac{13}{17} - (1\frac{4}{7})x}{2x+5} + \frac{(1\frac{4}{9})x-9}{2(x+8)}$.

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{22}{11x-18}=\dfrac{44}{11x-18}-\dfrac{4}{x-2}$,

অথবা, $\dfrac{-14}{(x-1)(11x-18)}=\dfrac{-16}{(11x-18)(x-2)}$.

$\therefore\quad \dfrac{7}{x-1}=\dfrac{8}{x-2}$,

অথবা, $7x-14=8x-8$; $\therefore\quad x=-6$.

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{4x^2+7}{2x-1}+\dfrac{6x^2-8x+11}{3x-1}=\dfrac{4x^2+3x+6}{x+1}$.

এখন, $\dfrac{(4x^2-1)+8}{2x-1}+\dfrac{2x(3x-1)-2(3x-1)+9}{3x-1}$

$$=\frac{4x(x+1)-(x+1)+7}{x+1},$$

অথবা, $\left\{2x+1+\dfrac{8}{2x-1}\right\}+\left\{2x-2+\dfrac{9}{3x-1}\right\}=4x-1+\dfrac{7}{x+1}$.

সুতরাং, $\dfrac{8}{2x-1}+\dfrac{9}{3x-1}=\dfrac{7}{x+1}$.

পরবর্ত্তী অংশের জন্য ছাত্রগণকে 174 নিয়মের উদা. 6 দেখিতে নির্দ্দেশ দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{7x-55}{x-8}+\dfrac{2x-17}{x-9}=\dfrac{6x-71}{x-12}+\dfrac{3x-14}{x-5}$.

এখন, $\dfrac{7(x-8)+1}{x-8}+\dfrac{2(x-9)+1}{x-9}=\dfrac{6(x-12)+1}{x-12}+\dfrac{3(x-5)+1}{x-5}$,

অথবা, $\left\{7+\dfrac{1}{x-8}\right\}+\left\{2+\dfrac{1}{x-9}\right\}=\left\{6+\dfrac{1}{x-12}\right\}+\left\{3+\dfrac{1}{x-5}\right\}$;

$\therefore\quad \dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{1}{x-12}+\dfrac{1}{x-5}$;

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{}{x-8}-\dfrac{}{x-5}=\dfrac{}{x-12}-\dfrac{}{x-9}$,

অথবা, $\dfrac{3}{(x-8)(x-5)}=\dfrac{3}{(x-12)(x-9)}$;

$\therefore\quad (x-8)(x-5)=(x-12)(x-9)$,

অথবা, $x^2-13x+40=x^2-21x+108$;

$\therefore\quad 8x=68$, অথবা, $x=8\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 93

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{5x-12}{x-3}$.

2. $\dfrac{2x+7}{x+2}+\dfrac{4x+29}{x+6}-\dfrac{6x-10}{x-3}=0$.

3. $\dfrac{25x-40}{5x-6}-\dfrac{7x+9}{x+2}+\dfrac{6x-1}{3x+4}=0$.

4. $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{2+\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{7}{3}$.

5. $8+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5+\dfrac{6}{x+2}}}=\dfrac{214}{25}$.

[নিয়ম 168 এর উদা. 3 দেখ]

6. $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{2x+7}{2+x}$.

7. $\dfrac{15x-7}{5x-4}+\dfrac{4x+3}{4x-3}=\dfrac{8x+1}{2x-1}$.

8. $\dfrac{4x-7}{4x+5}+\dfrac{15x+11}{5x+7}=\dfrac{12x+1}{3x+4}$.

9. $\dfrac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}$.

10. $\dfrac{12x^3+16x^2+29x-1}{3x^2+4x+8}=\dfrac{4x^2+20x+1}{x+5}$.

11. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=2x+\dfrac{2}{x-3}$.

12. $\dfrac{x^2+3}{x-1}+\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}$.

13. $\dfrac{2x^2-3x+7}{2x-1}+\dfrac{6x^2+2x+21}{3x+1}=\dfrac{3x^2+8x+7}{x+3}$.

14. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$.

15. $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{3x-20}{x-7}=\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{4x-19}{x-5}$.

16. $\dfrac{3x-8}{x-3}+\dfrac{4x-35}{x-9}=\dfrac{2x-9}{x-5}+\dfrac{5x-34}{x-7}$.

17. $\dfrac{3x-13}{x-4}+\dfrac{4x-41}{x-10}=\dfrac{2x-13}{x-6}+\dfrac{5x-41}{x-8}$.

18. $\frac{4x+21}{x+5}+\frac{5x-69}{x-14}=\frac{3x-5}{x-2}+\frac{6x-41}{x-7}.$

19. $\frac{5-6x}{3x-1}+\frac{2x+7}{x+3}=\frac{31-12x}{3x-7}+\frac{4x+21}{x+5}.$

20. $\frac{x^2+3x+3}{x+2}+\frac{x^2-15}{x-4}=\frac{x^2+7x+11}{x+5}+\frac{x^2-4x-20}{x-7}.$

21. $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1860.]

22. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

176. বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান :

1. সমাধান কর : $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{ab}{a+b}\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}=x\left\{3c+\frac{b}{a}-\frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\left[1-\frac{(2a+b)b}{(a+b)^2}\right]\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}$$

$$\therefore x=\frac{ab}{a+b}.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$

এখন, $\frac{x(ax+b)+c}{x(px+q)+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$

অতএব, $ax+b$ এর পরিবর্তে m এবং $px+q$ এর পরিবর্তে n বসাইয়া,

$$\frac{mx+c}{nx+r}=\frac{m}{n};$$

$$\therefore\ mnx+cn=mnx+rm;\ \therefore\ cn=rm,$$

অথবা, $c(px+q)=r(ax+b)$; $\therefore\ x(cp-ar)=br-cq$;

$$\therefore\ x=\frac{br-cq}{cp-ar}.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $(x-2a)^3+(x-2b)^3=2(x-a-b)^3$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(x-2a)^3-(x-a-b)^3=(x-a-b)^3-(x-2b)^3.$$

$x-2a$ এর পরিবর্তে X, $x-2b$ এর পরিবর্তে Y এবং $x-a-b$ এর পরিবর্তে Z বসাইয়া, $\quad X^3-Z^3=Z^3-Y^3,$

$$(X-Z)(X^2+XZ+Z^2)=(Z-Y)(Z^2+ZY+Y^2).$$

$X-Z=Z-Y$; কারণ, উহাদের প্রত্যেকেই $=b-a$;

$$\therefore \quad X^2+XZ+Z^2=Z^2+ZY+Y^2.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $\quad X^2-Y^2=Z(Y-X)$.

সাধারণ গুণনীয়ক $X-Y$ (যাহা $=2b-2a$) কে অপসারণ করিয়া,

$$X+Y=-Z,$$

অর্থাৎ, $\quad (x-2a)+(x-2b)=-(x-a-b)$.

সুতরাং, $\quad 3x=3(a+b)$; এবং $\therefore \quad x=a+b$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{x+a}{x+b}=\left(\dfrac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2$.

যেহেতু, $$\frac{x+a}{x+b}=\frac{(x+b)+(a-b)}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b},$$

এবং $$\frac{2x+a+c}{2x+b+c}=\frac{(2x+b+c)+(a-b)}{2x+b+c}=1+\frac{a-b}{2x+b+c},$$

অতএব, $$1+\frac{a-b}{x+b}=\left\{1+\frac{a-b}{2x+b+c}\right\}^2$$

$$=1+\frac{2(a-b)}{2x+b+c}+\frac{(a-b)^2}{(2x+b+c)^2}.$$

সুতরাং, পক্ষান্তর করিয়া এবং $a-b$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{x+b}-\frac{2}{2x+b+c}=\frac{a-b}{(2x+b+c)^2},$$

অথবা, $$\frac{c-b}{(x+b)(2x+b+c)}=\frac{a-b}{(2x+b+c)^2};$$

$$\frac{c-b}{x+b}=\frac{a-b}{2x+b+c}.$$

$$2x(c-b)+(c^2-b^2)=x(a-b)+b(a-b)\ ;$$

$$\therefore\quad x(a+b-2c)=c^2-ab\ ;$$

$$x=\frac{c^2-ab}{a+b-2c}.$$

উদা. 5. সমাধান কর :

$$\frac{4x}{3}-\frac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=5x-\frac{5}{3}\cdot\frac{3x^2-1}{x+5}-\frac{95-4x}{3}.$$

যেহেতু, $\dfrac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(25x^2-1)}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(5x+1)}{x+5}$,

এবং, $\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3x^2-1}{x+5}=\dfrac{\frac{5}{3}(3x^2-1)}{x+5}=\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5}$;

অতএব, $\dfrac{4x}{3}-\dfrac{5(5x+1)}{x+5}=5x-\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5}-\dfrac{95}{3}+\dfrac{4x}{3}.$

এখন, পক্ষান্তর করিয়া এবং 5 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2-\frac{1}{3}-(5x+1)}{x+5}=x-6\tfrac{1}{3}.$$

সুতরাং, $x^2-5x-1\frac{1}{3}=x^2-(1\frac{1}{3})x-31\frac{2}{3}$;

$\therefore\quad (3\frac{2}{3})x=30\frac{1}{3}$; $\quad\therefore\quad x=\frac{91}{11}=8\frac{3}{11}.$

প্রশ্নমালা 94

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{7x-3}{x+1}=9.$

2. $\dfrac{x+4a+b}{x+a+b}+\dfrac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$

3. $\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{4x+8}{3x+3}+\dfrac{10x+1}{6x+3}.$

4. $\dfrac{6x+8}{2x+1}-\dfrac{2x+38}{x+12}=1.$

5. $\dfrac{x+18}{x-2}-\dfrac{27-3x}{3x-19}=2.$

6. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-(a+b)}.$

7. $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}=0.$

8. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$

10. $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$.

11. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-8}{x-6}$.

12. $\dfrac{1}{(x+a)^2-b^2}+\dfrac{1}{(x+b)^2-a^2}=\dfrac{1}{x^2-(a+b)^2}+\dfrac{1}{x^2-(a-b)^2}$.

13. $\dfrac{3x^2+5x+8}{5x^2+6x+12}=\dfrac{3x+5}{5x+6}$. 14. $\dfrac{58x^2+87x+7}{87x^2+145x+11}=\dfrac{2x+3}{3x+5}$.

15. $\dfrac{a^2(a-2b)}{b(a-b)^2}\cdot x+\dfrac{2abc}{(a-b)}-\dfrac{ax}{b}=2cx-\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^3}$.

16. $(x-23)^3+(x-27)^3=2(x-25)^3$.

17. $\dfrac{4x-17}{9}-\dfrac{3\frac{2}{3}-22x}{33}=x-\dfrac{6}{x}\left(1-\dfrac{x^2}{54}\right)$.

18. $\left(\dfrac{x-2a}{x+2b}\right)^2=\dfrac{x-2a-2b}{x+2a+2b}$. 19. $\dfrac{x+19}{x+10}=\left(\dfrac{2x+33}{2x+24}\right)^2$.

20. $\left(\dfrac{x-a}{x+b}\right)^3=\dfrac{x-2a-b}{x+a+2b}$.

177. সরল সমীকরণের একাধিক বীজ (root) থাকিতে পারে না : সমীকরণস্থিত পদসমূহের ভিতর, অজ্ঞাতরাশি-(সাধারণতঃ, x) যুক্ত পদগুলিকে সমতাচিহ্নের বামদিকে এবং অন্যান্য পদগুলিকে সমতা-চিহ্নের ডা'নদিকে স্থানান্তরিত করিলে, সকল সরল সমীকরণকেই $ax=b$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়।

কিন্তু, $ax=b$ সমীকরণটিতে x এর, $\dfrac{b}{a}$ ভিন্ন অন্য কোন মান দ্বারাই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না।

অতএব, সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভবপর নহে।

অথবা : সম্ভব হইলে, ধরা যাউক যে, $ax=b$ সমীকরণটির, α ও β, এই দুইটি বীজ আছে। তাহা হইলে, অবশ্যই

$$\left.\begin{aligned} a\alpha&=b \\ \text{এবং,}\quad a\beta&=b \end{aligned}\right\}$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $a(\alpha-\beta)=0$.

কিন্তু, ইহা অসম্ভব ; কারণ, a একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা এবং (কল্পনানুসারে, a ও β বিভিন্ন হওয়ায়) $a-\beta$ এর মানও শূন্য নহে।

অতএব, সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা অসম্ভব।

178. সরল সমীকরণ সমাধানে দুইটি ব্যতিক্রম (exceptions) :

(1) কোন সরল সমীকরণ, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়ান্তে, $0\times x=0$, অর্থাৎ, $0=0$ এর আকার ধারণ করিলে, স্পষ্টতঃই উহা অজ্ঞাতরাশির যে কোন সাংখ্যমানের জন্যই অক্ষুণ্ণ থাকে। অতএব, এই সকল ক্ষেত্রে, সমীকরণের অসংখ্য বীজ থাকিতে দেখা যায়। বস্তুতঃ, ইহারা **অভেদ** (identity)।

উদা.। $x+2=\frac{x}{2}+\frac{x+4}{2}$ সমীকরণটিতে, পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা, $(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})x=\frac{4}{2}-2$, অর্থাৎ, $0\times x=0$ পাওয়া যাইতেছে।

অতএব, এই সমীকরণটি একটি অভেদ, এবং কাজেই x এর যে কোন সাংখ্যমানের জন্যই ইহার সমতা রক্ষিত হইবে।

(2) আবার, $\frac{x+5}{3}=\frac{x+4}{2}-\frac{x-4}{6}$ সমীকরণটি, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা, $(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})x=\frac{4}{2}+\frac{4}{6}-\frac{5}{3}$,

অথবা, $0\times x=1$,

অথবা, $0=1$, এই আকারে পরিবর্ত্তিত হইল ; ইহা সম্পূর্ণ অসম্ভব। কাজেই, প্রদত্ত সমীকরণে, অজ্ঞাতরাশির কোন মানের জন্যই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না। অর্থাৎ, এই সমীকরণটির কোন বীজ (root) নাই।

সাধারণভাবে বলিলে, 'যদি কোন সমীকরণকে, $0\times x=b$ এর আকারে রূপান্তরিত করা যায়, তবে সেই সমীকরণের কোন বীজ থাকিতে পারে না'।

II. সরল সমীকরণ বিষয়ক

179. সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী সমাধানের সাধারণ নিয়ম সপ্তদশ অধ্যায়েই বর্ণিত হইয়াছে। এক্ষণে, ঐ জাতীয় জটিলতর প্রশ্ন সম্পর্কে আলোচনা করা যাইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. বেলা 1 টা ও 2 টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি এক মিনিট সময়-সূচক ব্যবধানে থাকিবে ?

ধর, 1 টা বাজিয়া x মিনিটের সময় ঘড়ির কাঁটা দুইটি উল্লিখিত ব্যবধানে রহিয়াছে।

তাহা হইলে, নির্ণেয় সময়ে মিনিটের কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে x মিনিট দূরে অবস্থিত। এখন যেহেতু, মিনিটের কাঁটা, ঘণ্টার কাঁটা হইতে বারগুণ দ্রুতগতিতে চলে, অতএব, মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x-মিনিট পরিমিত স্থান অতিক্রম করে, ঘণ্টার কাঁটাটি ততক্ষণে এক মিনিট-সূচক দাগের $\frac{x}{12}$ অংশ পরিমিত স্থান অতিক্রম করে। কাজেই নির্ণেয় সময়ে ঘণ্টার কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে $\left(5+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট দূরে অবস্থিত।

যেহেতু, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, নির্ণেয় সময়ে কাঁটা দুইটির ভিতর এক মিনিট ব্যবধান রহিয়াছে,

$$\text{অতএব, } x=\left(5+\frac{x}{12}\right)\pm 1.$$

[মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার অগ্রবর্ত্তী হইলে, উপরিলিখিত দ্ব্যর্থকচিহ্নের মধ্যে '+' চিহ্নটি, এবং পশ্চাদ্বর্ত্তী হইলে, '−' চিহ্নটি লইতে হইবে।]

$$\therefore \quad \tfrac{11}{12}x=5\pm 1=6, \quad \text{অথবা,} \quad 4\,;$$

$$\therefore \quad x=\tfrac{72}{11}=6\tfrac{6}{11}, \quad \text{অথবা,} \quad =\tfrac{48}{11}=4\tfrac{4}{11}.$$

অতএব, 1 টা বাজিয়া $4\frac{4}{11}$ মিনিটের সময়, অথবা, $6\frac{6}{11}$ মিনিটের সময়, ঘড়ির কাঁটা দুইটি এক মিনিট ব্যবধানে থাকিবে।

উদা. 2. দুইটি স্থান, P ও Q, পরস্পর $3\frac{1}{2}$ মাইল দূরে অবস্থিত। A ও B দুই ব্যক্তি P হইতে, A গাড়ীতে ঘণ্টায় 6 মাইল গতিতে এবং B পায়ে হাঁটিয়া ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে, Q অভিমুখে যাত্রা করিল। Q তে পৌছিবার পর A তথায় 15 মিনিট বিশ্রাম করিয়া পুনরায় গাড়ীতে P অভিমুখে রওনা হইলে, সে B এর সহিত কোন্ স্থানে মিলিত হইবে ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

ধর, যে স্থানে A ও B মিলিত হইল, সেই স্থান P হইতে x মাইল দূরে অবস্থিত। তাহা হইলে, B যতক্ষণে x মাইল পথ অতিক্রম করিল, A ততক্ষণে Q তে পৌছিয়া তথায় 15 মিনিট বিশ্রামের পর পুনরায় $(3\frac{1}{2}-x)$ মাইল পথ ভ্রমণ করিল। স্পষ্টতঃ,

A এর এই সকল করিতে $\left(\frac{3\frac{1}{2}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}\right)$ ঘণ্টা সময় লাগিয়াছে; এবং B এর x মাইল যাইতে $\frac{x}{3}$ ঘণ্টা লাগিয়াছে।

$$\therefore \quad \frac{3\frac{1}{2}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}=\frac{x}{3};$$

অথবা, $7+3+7-2x=4x$;

$\therefore \; 6x=17; \qquad \therefore \; x=2\frac{5}{6}.$

অতএব, P হইতে $2\frac{5}{6}$ মাইল দূরে, B এর সহিত A মিলিত হইবে।

উদা. 3. কোন জমির মালিক, বাৎসরিক নগদ £10 ও শস্য-খাজানায় তাঁহার জমি পত্তন দিলেন। যখন শস্য বুসেল্ (bushel) প্রতি 10 শিলিং দরে বিক্রয় হইত, তখন ঐ খাজানাতে তাঁহার জমির প্রতি একরে (acre) 10 শিলিং হারে আয় হইত; কিন্তু শস্যের দর, প্রতি বুসেলে 13 শি. 6 পেন্স্ হইলে, ঐ খাজানাতে তাঁহার, প্রতি একরে 13 শি. হারে আয় হইত। কত বুসেল্ শস্য তিনি খাজানা হিসাবে পাইতেন।

ধর, তিনি বাৎসরিক x বুসেল্ শস্য খাজানা হিসাবে পাইতেন।

তাহা হইলে, বুসেল্ প্রতি 10 শি. দরে শস্য বিক্রয় হইলে, তাঁহার বাৎসরিক খাজানার পরিমাণ £$10+10x$ শি., অর্থাৎ $(200+10x)$ শি.; যেহেতু, এক্ষেত্রে তাঁহার খাজানা আদায়ের হার প্রতি একরে 10 শি. করিয়া, অতএব, তাঁহার জমির পরিমাণ $\frac{200+10x}{10}$, অথবা, '$20+x$' একর।

সর্ত্তানুসারে (অর্থাৎ, শস্যের দর, বুসেল্ প্রতি 13 শি., 6 পে. হইলে), তাঁহার বাৎসরিক আয় £$10+(13\frac{1}{2})x$ শি., অর্থাৎ $\frac{400+27x}{2}$ শি. এবং আয়ের হার প্রতি একরে 13 শি.। কাজেই, এক্ষেত্রে তাঁহার জমির পরিমাণ $=\frac{400+27x}{26}$.

অতএব, $20+x=\frac{400+27x}{26}$ অথবা, $520+26x=400+27x$;

$$\therefore \quad x=120.$$

সুতরাং, তিনি 120 বুসেল্ শস্য খাজানা হিসাবে পাইতেন।

উদা. 4. একটি খরগোস 80 লাফে যতদূর যাইতে পারে, ততদূর হইতে একটি কুকুর উহাকে ধরিবার জন্য দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। কুকুর যতক্ষণে দুইবার লাফ দেয়, খরগোস ততক্ষণে তিনবার লাফ দেয়; কিন্তু খরগোস দুই লাফে যতদূর যায়, কুকুর এক লাফে ততদূর যায়। ধরা পড়িবার পূর্ব্বে খরগোস কতবার লাফ দিয়াছিল?

ধর, (খরগোসের) নির্ণেয় লাফের সংখ্যা $= 3x$.

তাহা হইলে, ঐ সময়ের মধ্যে কুকুরের লাফের সংখ্যা $= 2x$.

এখন, কুকুরের প্রথম অবস্থান হইতে, খরগোস যে স্থানে ধরা পড়িল তাহার দূরত্ব, খরগোস $(80 + 3x)$ লাফে যতদূর যাইতে পারে, তাহার সমান ; আবার, কুকুর $2x$ লাফে যতদূর যায়, সেই দূরত্বেরও সমান।

কিন্তু, যেহেতু কুকুরের এক লাফে অতিক্রান্ত দূরত্ব খরগোসের দুই লাফে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমান ;

অতএব, কুকুরের $2x$ লাফের দূরত্ব = খরগোসের $4x$ লাফের দূরত্ব।

$$\therefore \quad 80 + 3x = 4x ; \qquad \therefore \quad x = 80.$$

অতএব, ধরা পড়িবার পূর্ব্বে খরগোস 3×80 অর্থাৎ 240টি লাফ দিয়াছিল।

উদা. 5. কোন পোদ্দারের নিকট, স্বর্ণখণ্ড ও রৌপ্যখণ্ড, কেবলমাত্র এই দুই প্রকারের অর্থ ছিল। এখন, a-সংখ্যক রৌপ্যখণ্ড, অথবা b-সংখ্যক স্বর্ণখণ্ড, উভয়েরই মূল্য s হইলে, যদি কোন ব্যক্তি স্বর্ণ ও রৌপ্যের মোট c-সংখ্যক খণ্ডে s পরিমিত অর্থ লইতে চাহেন, তবে তাঁহাকে কত খণ্ড স্বর্ণ ও কত খণ্ড রৌপ্য দেওয়া হইবে ?

ধর, নির্ণেয় রৌপ্যখণ্ডের সংখ্যা $= x$;

তাহা হইলে, নির্ণেয় স্বর্ণখণ্ডের সংখ্যা $= c - x$.

এখন, একখানি রৌপ্যখণ্ডের মূল্য $= \dfrac{s}{a}$

এবং একখানি স্বর্ণখণ্ডের মূল্য =

যেহেতু, কল্পনানুসারে, x-সংখ্যক রৌপ্যখণ্ড ও '$c - x$' সংখ্যক স্বর্ণখণ্ডের একত্র-যোগে মূল্য s,

অতএব, $s = x . \dfrac{s}{a} + (c - x) . \dfrac{s}{b}$;

$$\therefore \quad 1 = \frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} \qquad \text{অথবা,} \quad x\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{c}{b} - 1 ;$$

$$\therefore \quad x = \frac{a(c-b)}{a-b}, \qquad \text{এবং,} \quad c - x = c - \frac{a(c-b)}{a-b} = \frac{b(a-c)}{a-b}.$$

কাজেই, নির্ণেয় স্বর্ণ ও রৌপ্যখণ্ডের সংখ্যা যথাক্রমে $\dfrac{b(a-c)}{a-b}$ এবং $\dfrac{a(c-b)}{a-b}$.

উদা. 6. AB, 220 মাইল দীর্ঘ একটি রেলপথ। তিনখানা রেলগাড়ী P, Q ও R ঘণ্টায় যথাক্রমে 25, 20 ও 30 মাইল গতিতে ঐ পথে চলে। P ও Q যথাক্রমে 7 A.M. ও 8-15 A.M. এ, A হইতে B অভিমুখে, এবং R, 10-30 A.M. এ, B হইতে A অভিমুখে ছাড়িল। কোথায় এবং কোন্ সময় Q এবং R হইতে P সমদূরবর্ত্তী হইবে?

A Q P R B

মনে কর, উপরিস্থিত চিত্রানুরূপ অবস্থানে P গাড়ীখানি Q ও R হইতে সমদূরবর্ত্তী; এবং R গাড়ীখানি B হইতে রওনা হওয়ার (অর্থাৎ, 10-30 A.M. এর) x ঘণ্টা পরে উহারা উপরোক্ত অবস্থানে আসিয়াছে।

যেহেতু, 10-30 A.M. এর $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পূর্ব্বে P গাড়ীখানি A হইতে রওনা হইয়াছে, অতএব, উহা রওনা হওয়ার পর $(3\frac{1}{2}+x)$ ঘণ্টা চলিয়া উপরোক্ত অবস্থানে আসিয়াছে।

কাজেই, $AP=(3\frac{1}{2}+x).25$ মাইল;

এবং, $AQ=(2\frac{1}{4}+x).20$ মাইল;

আবার, $BR=30x$ মাইল।

$\therefore$ $PQ=AP-AQ=\{(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20\}$ মাইল।

এবং, $PR=AB-AP-BR=\{220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x\}$ মাইল।

কিন্তু, $PQ=PR$;

$\therefore$ $(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20=220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x$;

$\therefore$ $50.(3\frac{1}{2}+x)-(2\frac{1}{4}+x).20=220-30x$;

$60x=220-175+45=90$; $\quad x=1\frac{1}{2}$.

অতএব, 10-30 A.M. এর $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে, অর্থাৎ 12 টার সময়, P গাড়ীখানি Q ও R হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে।

আবার, যেহেতু P, 7 টার সময় A হইতে রওনা হইয়াছে, অতএব, 12 টার সময় উহা A হইতে 5×25 অর্থাৎ 125 মাইল দূরে থাকিবে।

উদা. 7. দুইজন যাত্রীর সঙ্গে মোট 5 হন্দর ওজনের মাল ছিল, এবং প্রত্যেকে যত পরিমাণ মাল বিনা ভাড়ায় লইয়া যাইতে পারে, তাহা বাদে তাহাদের যথাক্রমে 5 শি. 2 পে. ও 9 শি. 10 পে. মালের ভাড়া বাবদ দিতে হইল। কিন্তু, সমস্ত মালই একজনের হইলে, তাহাকে উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া বাবদ 19 শি. 2 পে. দিতে হইত। প্রত্যেকের সঙ্গে কত ওজনের মাল ছিল? এবং কত পরিমাণ মাল প্রত্যেকে বিনা ভাড়ায় লইতে পারিত?

ধর, প্রত্যেকে x হন্দর ওজনের মাল বিনা ভাড়ায় লইয়া যাইতে পারিত।

তাহা হইলে, (5 শি. 2 পে.) + (9 শি. 10 পে.) = $(5-2x)$ হন্দরের ভাড়া ;

$\therefore\ \frac{15 \times 12}{5-2x}$ পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

আবার, 19 শি. 2 পে. = $(5-x)$ হন্দরের ভাড়া ;

$\therefore\ \frac{230}{5-x}$ পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

অতএব, $\frac{15 \times 12}{5-2x} = \frac{230}{5-x}$; $\therefore\ 18(5-x) = 23(5-2x)$;

অথবা, $28x = 115 - 90 = 25$; $\therefore\ x = \frac{25}{28}$.

অতএব, বিনা ভাড়ায় লওয়া যাইতে পারে, এরূপ মালের ওজন

$= \frac{25}{28}$ হন্দর $= \frac{25}{28} \times 4 \times 28$ পা. $= 100$ পা. ;

এবং এক হন্দরের ভাড়া $= \frac{230}{5-x}$ পে. $= \frac{230}{5-\frac{25}{28}}$ পে. $= \frac{230 \times 28}{5 \times 23}$ পে. $= 56$ পে.।

যেহেতু, প্রথম যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 5 শি. 2 পে. = 62 পে.,

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 9 শি. 10 পে. = 118 পে.,

অতএব, প্রথম যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ওজন $= \frac{62}{56}$ হন্দর $= \frac{62}{56} \times 4 \times 28$ পা. $= 124$ পা. ;

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ওজন $= \frac{118}{56}$ হন্দর $= \frac{118}{56} \times 4 \times 28$ পা. $= 236$ পা. ;

সুতরাং, প্রথম যাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 124) পা. = 224 পা. ;

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 236) পা. = 336 পা.।

উদা. 8. কোন ব্যক্তি, প্রতি পাউণ্ড্ 3 শি. দরে কতক পরিমাণ এবং প্রতি পাউণ্ড্ 5 শি. দরে কতক পরিমাণ, চা ক্রয় করিয়া উভয় প্রকার চা এরূপভাবে সংমিশ্রণ করিল যে, মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ড্ 3 শি. 8 পে. দরে বিক্রয় করিলে, প্রতি পাউণ্ডে তাহার শতকরা 10 শি. হিসাবে লাভ হইতে পারে। ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে কত পরিমাণ খারাপ চা মিশাইয়াছিল ?

ধর, ভাল চায়ের এক পাউণ্ডের সহিত সে x পাউণ্ড্ খারাপ চা মিশ্রিত করিয়াছিল।

এখন, এক পাউণ্ড্ ভাল চা ও x পাউণ্ড্ খারাপ চায়ের

মোট ক্রয়-মূল্য = $(3x+5)$ শি. ;

$\therefore$ মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়-মূল্য $= \frac{3x+5}{x+1}$ শি.।

কিন্তু, মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ড্ $3\frac{2}{3}$ শি. দরে বিক্রয় করিলে, তাহার শতকরা 10 শি. লাভ হইবে; অর্থাৎ, প্রতি 100 শি. এর দরুণ সে 110 শি., অথবা, প্রতি শিলিং এর দরুণ সে $\frac{11}{10}$ শি. করিয়া পাইবে।

কাজেই, $3\frac{2}{3}$ শি. = মিশ্রিত চায়ের ক্রয়-মূল্যের $\frac{11}{10}$ অংশ;

$$\therefore \quad 3\frac{2}{3} = \frac{11}{10} \times \frac{3x+5}{x+1}; \quad \text{অথবা,} \quad \frac{11}{3} = \frac{11}{10} \times \frac{3x+5}{x+1};$$

অথবা, $10(x+1) = 3(3x+5)$; $\qquad x = 5.$

অতএব, ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে 5 পাউণ্ড্ খারাপ চা মিশাইয়াছিল।

উদা. 9. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যগণদ্বারা 5-গভীরতাবিশিষ্ট (5-deep) এক শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square) রচনা করিতে পারেন, অথবা, 6-গভীরতা-বিশিষ্ট (6-deep) এক শূন্যগর্ভ বর্গও রচনা করিতে পারেন; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা হইতে শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা 4 কম। ঐ দলে মোট কত সৈন্য ছিল? [কলিঃ, 1887.]

[যদি কয়েকজন লোককে, কতকগুলি সমান্তর ও সমভাবে স্থিত বিভিন্ন সারিতে এরূপে সাজান যায় যে, প্রত্যেক সারির লোকসংখ্যা, মোট সারির সংখ্যার সমান, তাহা হইলে, ঐ লোকদিগকে একটি সম্পূর্ণ বর্গে (in a solid square) সাজান হইল, বলা হয়। নিম্নপ্রদত্ত চিত্র হইতে, এইরূপ বর্গ-রচনার পরিষ্কার ধারণা হইবে। এক্ষেত্রে, A_1, B_1, C_1, প্রভৃতি এক একজন লোক নির্দেশ করিতেছে।

A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1

A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2 H_2

A_3 B_3 C_3——D_3——E_3——F_3 G_3 H_3

A_4 B_4 C_4 D_4——E_4 F_4 G_4 H_4

A_5 B_5 C_5 D_5——E_5 F_5 G_5 H_5

A_6 B_6 C_6——D_6——E_6——F_6 G_6 H_6

A_7 B_7 C_7 D_7 E_7 F_7 G_7 H_7

A_8 B_8 C_8 D_8 E_8 F_8 G_8 H_8

চিত্রে প্রদর্শিত সম্পূর্ণ বর্গে (solid square এ) সর্ব্বশুদ্ধ আঁটটি সারি এবং প্রত্যেক সারিতে আটজন

করিয়া লোক আছে। এই বর্গের অভ্যন্তর হইতে, $C_3F_3F_6C_6$ সম্পূর্ণ বর্গটি অপসারিত করা হইলে, অবশিষ্টাংশকে 2-গভীরতাবিশিষ্ট একটি **শূন্যগর্ভ বর্গ** (hollow square, two-deep) বলা হয়; স্পষ্টতঃ, ইহারও সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা 8; কিন্তু, $C_3F_3F_6C_6$ বর্গটির পরিবর্তে, যদি $D_4E_4E_5D_5$ বর্গটি অপসারিত করা হইত, তাহা হইলে অবশিষ্টাংশকে 3-গভীরতাবিশিষ্ট (three-deep) একটি শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square) বলা হইত; বলা বাহুল্য যে, এস্থলেও সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা 8 ই থাকিত।

অতএব দেখা যায় যে, সম্মুখ-সারিতে x-সংখ্যক লোক সমন্বিত, এবং 2-গভীরতাবিশিষ্ট (two-deep) কোন শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা $=x^2-(x-4)^2$; ঐরূপ 3-গভীরতাবিশিষ্ট (three-deep) কোন শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা $=x^2-(x-6)^2$; ইত্যাদি।

কাজেই, যে শূন্যগর্ভ বর্গের (hollow square এর) সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা x, এবং যাহার গভীরতা (depth) n, সেই শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা $=x^2-(x-2n)^2$.]

ধর, উদাহরণোল্লিখিত প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা $=x$; তাহা হইলে, শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা, স্পষ্টতঃ, $=x-4$.

কাজেই, প্রথমোক্ত বর্গের সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-10)^2$;....................(1)

এবং শেষোক্ত বর্গের সৈন্যসংখ্যা $=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$;........(2)

এখন, যেহেতু একই সৈন্যদল হইতে উভয় প্রকার বর্গ রচনা হইতে পারে, অতএব, মোট সৈন্যসংখ্যা উভয় ক্ষেত্রেই এক।

সুতরাং, $x^2-(x-10)^2=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$;

অথবা, $20x-100=24(x-4)-144$;

অথবা, $4x=144+96-100=140$;

$\therefore\quad x=35.$

কাজেই, (1) হইতে, নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=35^2-25^2=60\times10=600.$

প্রশ্নমালা 95

1. বেলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটির একটি, অপরটির উপর সমাপতিত হইবে?

2. অপরাহ্ণ পাঁচটা ও ছয়টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

3. বেলা সাতটা ও আটটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি (i) পরস্পর-বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পর-লম্ব, (iii) একত্রিত, হইবে?

4. ছয়টা বাজিবার পর সর্ব্বপ্রথম কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি (i) পরস্পর-বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পর-লম্ব, হইবে ?

5. দুই ব্যক্তির একজন, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় p মাইল গতিতে, এবং অন্যজন B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় q মাইল গতিতে, চলিতে লাগিল ; উহারা একই সময়ে যাত্রা করিয়া থাকিলে এবং A ও B এর দূরত্ব a মাইল হইলে, A হইতে কতদূরে উহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে ?

6. দুই ব্যক্তি পরস্পর সাক্ষাৎ করিবার জন্য 22 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি স্থান হইতে যথাক্রমে, ঘণ্টায় 5 মাইল ও 6 মাইল গতিতে, চলিতে আরম্ভ করিল ; তাহারা প্রথম সাক্ষাতের পরও (পুনর্ব্বার সাক্ষাতের জন্য) বরাবর চলিতে থাকিলে, কোথায় ও কোন্ সময়ে, তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?

7. কোন ব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া A হইতে B পর্য্যন্ত যাইতে এক-তৃতীয়াংশ পথ ঘণ্টায় a মাইল গতিতে এবং বাকী পথ ঘণ্টায় $2b$ মাইল গতিতে অতিক্রম করিল ; সে যদি, প্রথম হইতে বরাবর ঘণ্টায় $3c$ মাইল গতিতে চলিত, তাহা হইলে, সে ঐ সময়ের মধ্যে B তে পৌছিয়া পুনরায় A তে ফিরিয়া আসিতে পারিত।

প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

8. কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায়, A, B কে পাঁচ মিনিটে 75 গজ পিছনে ফেলিয়া, 900 গজ পথ অতিক্রম করিল ; কিন্তু এই সময়, A হঠাৎ পড়িয়া যাইয়া, পূর্ব্ব বেগ অপেক্ষা মিনিটে 20 গজ কম দৌড়াইয়াও, B হইতে মাত্র অর্দ্ধ মিনিট পরে গন্তব্যস্থানে পৌছিল। মোট কত সময়ের জন্য প্রতিযোগিতা চলিয়াছিল ?

9. কোন শহর হইতে, এক ব্যক্তি কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ে এক নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌছিবার নিমিত্ত যাত্রা করিয়া এক-চতুর্থাংশ পথ অতিক্রম করিবার পর বুঝিতে পারিল যে, সে ঐরূপ বেগে চলিতে থাকিলে নির্দ্দিষ্ট সময়ে গন্তব্যপথের কেবলমাত্র $\frac{5}{6}$ অংশ যাইতে পারিবে ; তৎপরে, সে ঘণ্টায় এক মাইল হিসাবে তাহার গতি বাড়াইয়া ঠিক সময়েই নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌছিল। তাহার ভ্রমণের গতি নির্ণয় কর।

10. কোন প্রজা, বাৎসরিক খাজানা বাবদ নগদ £80 এবং কতক পরিমাণ ধান দেওয়ার চুক্তিতে, কতক জমি পত্তন লইল। ধানের দর যখন প্রতি বুসেল্ £1. 5 শি., তখন তাহার জমির খাজানা গড়ে প্রতি একরে £1. 15 শি. করিয়া পড়িত ; এবং ধান যখন প্রতি বুসেল্ £1. 10 শি. দরে বিক্রয় হইত, তখন তাহার জমির খাজানা গড়ে প্রতি একরে £2 করিয়া পড়িত। কত বুসেল্ ধান তাহাকে খাজানা বাবদ দিতে হইত ?

11. কোন চাপরাসীকে বাৎসরিক £8 ও একটি অফিস-পরিচ্ছদ দেওয়ার চুক্তিতে কাজে নিযুক্ত করিয়া, 7 মাস পরে নগদ £2. 3 শি. 4 পে. ও অফিস-পরিচ্ছদ দিয়া, কাজ হইতে বরখাস্ত করা হইল। অফিস-পরিচ্ছদের মূল্য কত ছিল ?

12. একটি খরগোস 50 লাফে যতদূর পথ অতিক্রম করিতে পারে, ততদূর হইতে একটি কুকুর খরগোসটিকে ধরিবার জন্য দৌড়াইতে লাগিল। কুকুর যে সময়ে তিনবার লাফ দেয়, খরগোস সে সময়ে চারিবার লাফ দেয় ; কিন্তু কুকুর দুই লাফে যতদূর যায়, খরগোস তিন লাফে ততদূর যায়। কুকুর কতবার লাফ দেওয়ার পর খরগোসটিকে ধরিবে ?

13. একটি কুকুর 60 লাফে যতদূর যাইতে পারে, ততদূর পিছন হইতে, সে একটি খরগোসকে ধরিবার জন্য দৌড়াইতে লাগিল। খরগোস যে সময়ে পাঁচবার লাফ দেয়, কুকুর সেই সময়ে চারিবার লাফ দেয় ; কিন্তু খরগোস চারি লাফে যতদূর যায়, কুকুর তিন লাফে ততদূর যায়; খরগোসটি ধরা পড়িবার সময় পর্য্যন্ত, প্রত্যেকে কতবার লাফ দিয়াছিল ?

14. 'সেণ্ট্ জন্'এর নৌকাখানি, 30 বার দাঁড় টানিয়া যতদূর অগ্রসর হইতে পারে, ততদূর পিছন হইতে 'কেয়াস্' এর নৌকা 'জন্' এর নৌকাটিকে ধরিবার জন্য উহার পশ্চাদ্গামী হইল। 'কেয়াস্' এর নৌকায় যে সময়ে তিনবার দাঁড় টানা হয়, 'জন্' এর নৌকায় সে সময়ে চারিবার দাঁড় টানা হয় ; কিন্তু দুইবার দাঁড় টানায় 'কেয়াস্' এর নৌকা যতদূর যায়, তিনবার দাঁড় টানায় 'জন্' এর নৌকা ততদূর যায়। 'জন্' এর নৌকার সহিত সঙ্ঘর্ষ করিবার সময় পর্য্যন্ত, 'কেয়াস্' এর নৌকায় কতবার দাঁড় টানা হইয়াছিল ?

15. A এবং B কতকগুলি শিলিংএ পরিপূর্ণ একটি থলিয়া পাইল। A উহা হইতে 2 শিলিং এবং অবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ, এবং তৎপরে B, 3 শিলিং ও এতদবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ লইয়া দেখিতে পাইল যে, উভয়েই সমান অংশ লইয়াছে। থলিয়াটিতে কত সংখ্যক শিলিং ছিল, এবং প্রত্যেকে কত করিয়া লইয়াছিল ?

16. নাবিকদের জন প্রতি এক পাউণ্ড্ হিসাবে 60 দিনের আহার্য্য বিস্কুট লইয়া সমুদ্রপথে কোন জাহাজ রওনা হইল। রওনা হওয়ার 20 দিন পরে, ঝড় ও বন্যায় 5 জন নাবিক ভাসিয়া গেল, এবং জাহাজখানিও এরূপ ক্ষতিগ্রস্ত হইল যে, উহাকে ঐস্থানে 24 দিন বিলম্ব করিতে হইল। এই জন্য, প্রত্যেক নাবিকের দৈনিক আহার্য্য এক পাউণ্ডের $\frac{5}{7}$ অংশতে পরিণত করিতে হইলে, কতজন নাবিক লইয়া জাহাজখানি রওনা হইয়াছিল ?

17. জলের ভিতর ওজন করায়, 19 পাউণ্ড্ সোনা 18 পাউণ্ড্ হইলে, এবং 10 পাউণ্ড্ রূপা 9 পাউণ্ড্ হইলে, সোনা ও রূপা নির্ম্মিত একটি ডেলার ওজন যদি সাধারণভাবে (অর্থাৎ, বায়ুতে) 106 পাউণ্ড্, এবং জলের ভিতর 99 পাউণ্ড্ হয়, তবে ডেলাটির ভিতর কত পরিমাণ সোনা এবং কত পরিমাণ রূপা আছে, তাহা নির্ণয় কর।

18. কোন লোক নৌকায় দাঁড় টানিয়া দশ ঘণ্টায় কেম্ব্রিজ (Cambridge) হইতে 20 মাইল দূরবর্ত্তী ইলি শহর (Ely) পর্য্যন্ত যাইয়া পুনরায় কেম্ব্রিজে ফিরিয়া আসিল ; ঐ সময়ে স্রোতের গতি সর্ব্বক্ষণ একই দিকে ছিল। সে লক্ষ্য করিয়াছিল যে, স্রোতের অনুকূলে 3 মাইল পথ যাইতে, তাহার যে সময় লাগিয়াছিল, সেই সময়ে স্রোতের প্রতিকূলে সে মাত্র 2 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারিয়াছিল। কেম্ব্রিজ হইতে ইলি যাইতে তাহার কত সময় লাগিয়াছিল, এবং ইলি হইতে ফিরিয়া আসিতেই বা কত সময় লাগিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

19. কোন লোক তাহার জীবনের $\frac{1}{6}$ অংশ শৈশবে, $\frac{1}{12}$ অংশ যৌবনে এবং ($\frac{1}{7}$ অংশ $+5$ বৎসর) প্রৌঢ়াবস্থায় কাটাইবার পর, তাহার একটি পুত্র জন্মে। পুত্রটি পিতার অর্দ্ধ বয়সে মারা যাইলে এবং পিতা তাহার পর আরও চারি বৎসর বাঁচিয়া থাকিলে, পুত্রটি কত বয়সে মারা গিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

20. দুইটি ধাতব শলাকার একটি 14 আউন্স্ রূপা ও 6 আউন্স্ টিন্ দ্বারা, এবং অপরটি 8 আউন্স্ রূপা ও 12 আউন্স্ টিন্ দ্বারা, নির্ম্মিত ; সমান পরিমাণ রূপা ও টিন দ্বারা নির্ম্মিত 20 আউন্স্ ওজনের একটি শলাকা তৈয়ার করিতে হইলে, উপরোল্লিখিত শলাকা দুইটির প্রত্যেকটি হইতে, কতটুকু করিয়া লইতে হইবে ?

21. £607. 1 শি. ও 8 পে. কে এরূপ দুই অসমান অংশে ভাগ কর যে, বৃহত্তর অংশের দুই বৎসরের শতকরা £$3\frac{1}{2}$ হারে সুদ, অপর অংশের $2\frac{1}{2}$ বৎসরের শতকরা £$3\frac{1}{4}$ হারে সুদ হইতে, £18. 16 শি. বেশী হইবে।

22. কোন ভদ্রলোক তাঁহার আসবাবপত্রের চারিটি জিনিষ স্থানান্তরিত করিবার নিমিত্ত, প্রথম জিনিষটির জন্য দুইটি, দ্বিতীয় জিনিষটির জন্য তিনটি, তৃতীয় জিনিষটির জন্য চারিটি এবং চতুর্থ জিনিষটির জন্য পাঁচটি কুলী নিযুক্ত করিলেন। প্রথম শ্রেণীর কুলীদ্বয়কে একটি পয়সাপূর্ণ থলিয়া এবং আরও এক পয়সা, দ্বিতীয় শ্রেণীর কুলী তিনটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও চারিটি পয়সা, তৃতীয় শ্রেণীর কুলী চারিটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও পাঁচটি পয়সা এবং চতুর্থ শ্রেণীর কুলী পাঁচটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও নয়টি পয়সা দিয়া দেখিতে পাইলেন যে, তৃতীয় ও চতুর্থ শ্রেণীর কুলীদিগের প্রত্যেকে সমান সংখ্যক পয়সা পাইয়াছে। প্রত্যেক

থলিয়াতে কত করিয়া পয়সা ছিল, প্রত্যেক কুলী কত করিয়া পয়সা পাইয়াছিল এবং ভদ্রলোকই বা সর্ব্বসমেত কত পয়সা দিয়াছিলেন, তাহা নির্ণয় কর।

23. পনেরখানা গিনির ওজন 4 আউন্স্ হওয়া উচিত ; কিন্তু, গিনিপূর্ণ একটি পার্শেলের গিনিগুলি ওজন করিয়া, এবং উহাদের সংখ্যা গণনা করিয়া, দেখা গেল যে, ওজনানুসারে উহাতে গিনির সংখ্যা যত হওয়া উচিত, প্রকৃতপক্ষে তাহা হইতে (পার্শেলে) নয়খানা গিনি বেশী আছে। আবার, পার্শেলস্থিত গিনির সংখ্যার অর্দ্ধ হইতে $10\frac{1}{2}$ খানি বেশী গিনির ওজন, ঐ সংখ্যক গিনির যথাযথ ওজন হইতে $1\frac{1}{5}$ আউন্স্ কম। পার্শেলে কতগুলি গিনি ছিল ?

24. কোন কর্ম্মকার £10 মূল্যের কতক পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে সমপরিমাণ সাধারণ রৌপ্য ও নগদ £3. 15 শি. পাইল। পুনরায়, সে পূর্ব্বপ্রকার 12 আউন্স্ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে 8 আউন্স্ সাধারণ রৌপ্য (যাহার জন্য সে পূর্ব্ব হারেই মূল্য ধরিয়াছিল) ও নগদ £2. 16 শি. পাইয়াছিল। বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের এক আউন্সের মূল্য কত, এবং কত পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতই বা সে প্রথমে বিক্রয় করিয়াছিল ?

25. দুইজন যাত্রীকে, তাহাদের অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ যথাক্রমে 2 শি. 10 পে. ও 7 শি. 6 পে., দিতে হইয়াছিল ; যদি সমস্ত মালই একজনের হইত, তাহা হইলে তাহাকে অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ 14 শি. 6 পে. দিতে হইত ; যদি বিনা ভাড়ায় কোন মাল লইয়া যাইতে দেওয়া না হয়, তবে, তাহাদের প্রত্যেককে কত করিয়া মালের ভাড়া বাবদ দিতে হইবে ?

26. কোন ঘাসওয়ালা, 'হাজার আঁটি 5 টাকা' দরের কত আঁটি ঘাস, 'হাজার আঁটি 6 টাকা' দরের, 5600 আঁটির সহিত মিশাইবে, যাহাতে মিশ্রণের প্রতি 100 আঁটি 11 আনা দরে বিক্রয় করিয়া তাহার শতকরা 20 টাকা করিয়া লাভ হইবে ?

27. কোন বালক প্রতি 2 পেন্সে 3 টা দরে কতকগুলি, এবং প্রতি পেন্সে 2 টা দরে পূর্ব্ব সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ কমলালেবু ক্রয় করিল। সমস্ত কমলালেবু কত দরে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা 20 শিলিং করিয়া লাভ থাকিবে ? তাহার মোট লাভ 5 শি. 4 পে. হইয়া থাকিলে, সে মোট কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল ?

28. কোন লোক, কতকগুলি বৈদেশিক স্বর্ণমুদ্রার প্রত্যেকটি হইতে উহার পাঁচভাগের একভাগ ঘষিয়া বাহির করিয়া নিয়া, উহাদের (ঐরূপ হাল্কা স্বর্ণমুদ্রার) $\frac{2}{3}$ অংশ চালাইবার পর ধরা পড়িল ; এবং একটি হাল্কা মুদ্রা বাদে, বাকী সকল মুদ্রাই হাল্কা বলিয়া বাজেয়াপ্ত হইল। তাহার নিকট যে মুদ্রাটি রহিল তাহা লইয়া সরিয়া

পড়িয়া দেখিতে পাইল যে, সে পূর্ব্বে যত পরিমাণ লাভ করিয়াছিল, পরে তাহার ঠিক তত পরিমাণ লোকসান হইয়াছে। প্রথমে তাহার নিকট কতগুলি বৈদেশিক মুদ্রা ছিল?

29. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার অঙ্ক তিনটির যে কোনটি তৎপরবর্ত্তী অঙ্কটি হইতে এক বেশী, এবং নির্ণেয় সংখ্যাটি হইতে, উহাকে উল্টাইয়া লিখিয়া লব্ধ সংখ্যার এক-চতুর্থাংশের পার্থক্য, সংখ্যাস্থিত অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির 36 গুণ হইবে।

30. কোন সৈন্যদলকে সম্পূর্ণ বর্গে সাজাইয়া দেখা গেল যে, 60 জন সৈন্য বেশী হইয়াছে ; তৎপরে, উহার সম্মুখ-সারির সংখ্যা 5 বাড়াইয়া, এবং গভীরতায় (depth-এ) 3 জন সৈন্য কমাইয়া দেখা গেল যে, উহাতে একজন সৈন্য কম পড়ে। দলের সৈন্যসংখ্যা নির্ণয় কর।

31. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যগণদ্বারা 10-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square, 10-deep) রচনা করিতে পারেন। দলে মোট 2800 সৈন্য থাকিলে, উপরোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা কত?

32. একদল লোককে, 4-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে, অথবা, 8-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে, সাজান যাইতে পারে ; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সংখ্যা, শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সংখ্যা হইতে 19 বেশী। দলের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

33. সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা হইতে গভীরতায় পাঁচজন বেশী সৈন্য লইয়া, একদল সৈন্য সমভাবে অগ্রসর হইতেছিল ; কিন্তু, শত্রুসৈন্য দৃষ্টিগোচর হওয়ায়, সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা 845 বাড়াইয়া দলটিকে নূতন রকমে সাজাইতে হইল ; এবং ইহা করিতে গভীরতা 5 এ পরিণত করিতে হইল। দলে কত সৈন্য ছিল?

সপ্তবিংশ অধ্যায়

জটিল সহ-সমীকরণ (Harder Simultaneous Equations)

এবং

তৎসম্পর্কীয় প্রশ্নাবলী (Problems)

180. দুইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ (simultaneous equations) সমাধান করিবার প্রণালী অষ্টাদশ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। এক্ষণে, ঐ বিষয়ে অপেক্ষাকৃত বিশদরূপে আলোচনা করা যাইতেছে।

181. বজ্রগুণন-প্রণালী (Method of Cress Multiplication) :

$a_1x+b_1y+c_1z=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ * হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=0,$$

এবং, $$a_2c_1x+b_2c_1y+c_2c_1z=0.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া,

$$(c_1a_2-c_2a_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=0\ ;$$

---

* এই নিয়মে, x ও y এর সহগরূপে ব্যবহৃত অক্ষরগুলির সম্পর্কে কিছু বলা আবশ্যক। স্পষ্টই, c যেরূপ d হইতে, অথবা, অন্য যে কোন অক্ষর যেরূপ অপর আর একটি অক্ষর হইতে বিভিন্ন, এক্ষেত্রে, সেইরূপ 'a_1ও a_2 হইতে বিভিন্ন,' বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছে। b_1, b_2 ; c_1, c_2 ; প্রভৃতিকেও অনুরূপ অর্থে প্রয়োগ করা হইয়াছে। ইহার কারণ এই যে, বিভিন্ন সমীকরণের অনুরূপ সহগগুলিকে বিভিন্ন অঙ্কযুক্ত (with different suffixes) একই অক্ষর দ্বারা সূচিত করিলে, উহাদের সমাধানলব্ধ ফলগুলি মনে রাখা সহজ হয়। এই উদ্দেশ্যেই, প্রথম সমীকরণের x এর সহগকে a_1 দ্বারা, এবং দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগকে a_2 দ্বারা, সূচিত করা হইয়াছে ; এবং b_1, b_2 ; c_1, c_2 ; প্রভৃতিরও অনুরূপ অর্থ বুঝিতে হইবে। কোন কোন সময়ে, অক্ষরগুলিকে অঙ্কযুক্ত না করিয়া মাত্রা-(dash) যুক্ত করিয়াও ঐরূপ অর্থ বুঝান হয়। যথা, x, y, z সমন্বিত তিনটি সহ-সমীকরণ থাকিলে, প্রথমটিতে x, y ও z এর সহগগুলিকে যথাক্রমে a', b', c' দ্বারা ; দ্বিতীয়টিতে, a'', b'', c'' দ্বারা, তৃতীয়টিতে a''', b''', c''' দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

$$(c_1a_2 - c_2a_1)x = (b_1c_2 - b_2c_1)y\ ;$$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1}. \quad \ldots \quad (1)$$

আবার, প্রথম সমীকরণটিকে a_2 দ্বারা, এবং দ্বিতীয়টিকে a_1 দ্বারা গুণ কর ;

$$\therefore \quad a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2z = 0,$$

এবং, $$a_2a_1x + b_2a_1y + c_2a_1z = 0.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (c_2a_1 - c_1a_2)z = 0\ ;$$

$$\therefore \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1)z\ ;$$

$$\therefore \quad \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

টীকা। সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে একটির নীচে অপরটিকে লিখিয়া, উপরোক্ত ফলগুলি অতি সহজে মনে রাখা যায় :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}\right\}.$$

এক্ষণে, দেখা যায় যে,

(i) x এর নীচে যে রাশিটি আছে, উহা = (প্রথম সমীকরণের y এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ × প্রথম সমীকরণের z এর সহগ) ;

(ii) y এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের z এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ × প্রথম সমীকরণের x এর সহগ) ;

(iii) z এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের x এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগ × প্রথম সমীকরণের y এর সহগ)।

অনুসি.। উপরোক্ত সমীকরণদ্বয়ে, z এর পরিবর্তে 1 বসাইলে,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$ পাওয়া যায়।

এবং, ইহা হইতেই, $$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \text{এবং} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

সহ-সমীকরণদ্বয়ের বীজ (root), অর্থাৎ x ও y এর মান, নির্ণয় করা যায়।

টীকা। উপরোক্ত ফলগুলি ভালরূপে মুখস্থ করিয়া রাখা উচিত। এইগুলি দ্বারা যে শুধু দুইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণ সহজে ও সুচারুরূপে সমাধান করা যাইতে পারে, তাহা নহে; তিনটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট একশ্রেণীর সহ-সমীকরণের সমাধানেও এইগুলি সর্ব্বদা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{l}3x-5y+9=0\\5x-3y-1=0\end{array}\right\}$

এখানে, $a_1=3,\quad b_1=-5,\quad c_1=\ \ 9;$

$a_2=5,\quad b_2=-3,\quad c_2=-1.$

সুতরাং,

$$\frac{x}{(-5)(-1)-(-3).9}=\frac{y}{9\times5-(-1).3}=\frac{1}{3.(-3)-5.(-5)};$$

অথবা, $\dfrac{x}{5+27}=\dfrac{y}{45+3}=\dfrac{1}{-9+25}$; বা, $\dfrac{x}{32}=\dfrac{y}{48}=\dfrac{1}{16}$;

$\therefore\quad x=\frac{32}{16}=2,\quad$ এবং $\quad y=\frac{48}{16}=3.$

অতএব, $x=2$ এবং $y=3.$

উদা. 2. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{ll}-7x+8y=\ \ 9 & \cdots(1)\\5x-4y=-3 & \cdots(2)\end{array}\right\}$

(1) হইতে, $-7x+8y-9=0$

(2) হইতে, $5x-4y+3=0$

সুতরাং,

$$\frac{x}{8\times3-(-4)(-9)}=\frac{y}{(-9).5-3.(-7)}=\frac{1}{(-7)(-4)-5\times8};$$

অথবা, $$\frac{x}{24-36}=\frac{y}{-45+21}=\frac{1}{28-40};$$

অথবা, $$\frac{x}{-12}=\frac{y}{-24}=\frac{1}{-12};$$

$$x=\frac{-12}{-12}=1,\quad \text{এবং}\quad y=\frac{-24}{-12}=2.$$

অতএব, $x=1$ এবং $y=2.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll}(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5 & \cdots(1)\\ 5x-11y+35=0 \quad \cdots & \cdots(2)\end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

(1) হইতে, $xy+7y-3x-14=xy+3x-y+2,$

$\therefore \quad 6x-8y+16=0\,;$

$\left.\begin{array}{l}3x-4y+\ \ 8=0\\ 5x-11y+35=0\end{array}\right\}$ এবং,

সুতরাং,

$$\frac{x}{(-4).35-(-11).8}=\frac{y}{8\times 5-35\times 3}=\frac{1}{3.(-11)-5.(-4)}\,;$$

অথবা, $\dfrac{x}{-140+88}=\dfrac{y}{40-105}=\dfrac{1}{-33+20},$

অথবা, $\dfrac{x}{-52}=\dfrac{y}{-65}=\dfrac{1}{-13}.$

অতএব, $x=4$ এবং $y=5.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{lll}2x-3y+4z=\ 0 & \ldots & (1)\\ 7x+2y-6z=\ 0 & \ldots & (2)\\ 4x+3y+\ \ z=37 & \ldots & (3)\end{array}\right\}$

এখন, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{x}{(-3)(-6)-2\times 4}=\frac{y}{4\times 7-(-6).2}=\frac{z}{2\times 2-7.(-3)},$$

অথবা, $\dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{40}=\dfrac{z}{25}\,;$ অথবা, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{5}$

মনে কর, উপরোক্ত প্রত্যেক ভগ্নাংশই, k, এই অজ্ঞাতরাশির সমান

তাহা হইলে, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{5}=k\,;$

$\therefore \quad x=2k, \quad y=8k, \quad z=5k. \quad \cdots$ (ক)

এখন, x, y, z এর মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

$k(8+24+5)=37,$

অথবা, $37k=37\,; \quad \therefore \ k=1.$

সুতরাং, (ক) হইতে, $x=2, \quad y=8$ এবং $z=5.$

উদা. 5. সমাধান কর :
$$\left.\begin{aligned} x+6y &= 5z \quad \ldots \quad (1)\\ 7x+z &= 6y \quad \ldots \quad (2)\\ 5x+6y-4z &= 24 \quad \ldots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

(1) হইতে, $x+6y-5z=0$
(2) হইতে, $7x-6y+z=0$

সুতরাং, $$\frac{x}{6\times 1-(-6).(-5)}=\frac{y}{(-5).7-1\times 1}=\frac{z}{1.(-6)-7\times 6},$$

অথবা, $$\frac{x}{6-30}=\frac{y}{-35-1}=\frac{z}{-6-42};$$

অথবা, $$\frac{x}{-24}=\frac{y}{-36}=\frac{z}{-48};$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$$

[প্রত্যেকটি ভগ্নাংশকে -12 দ্বারা গুণ করিয়া]

এখন, ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটি $=k$, ধরিয়া লইয়া,

$x=2k, \quad y=3k, \quad z=4k. \quad \ldots \quad \ldots$ (ক)

x, y, z এর মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

$k(10+18-16)=24,$

অথবা, $12k=24$; $\therefore k=2.$

সুতরাং, (ক) হইতে, $x=4, \quad y=6$ এবং $z=8.$

প্রশ্নমালা 96

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{aligned} 2x+3y-8 &= 0\\ 3x-4y+5 &= 0\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 3x-5y+9 &= 0\\ 5x+2y-16 &= 0\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} 4x-5y+8 &= 0\\ 2x-3y+6 &= 0\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} -3x+2y+2 &= 0\\ 5x-3y-5 &= 0\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 6x-7y+12 &= 0\\ -7x+4y+11 &= 0\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 7x-8y &= -14\\ 5x-3y &= 9\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} -6x+5y+2 &= 0\\ 13x-9y &= 19\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} -7x+5y+11 &= 0\\ 8x-5y &= 19\end{aligned}\right\}$

9. $\begin{aligned} 4x - 11y + 6 &= 0 \\ 9x - 13y &= 10 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 8x - 7y &\quad 19 \\ 10x - 9y &\quad 23 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} -12x + 17y + 16 &= 0 \\ 9x - 13y &= 11 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 14x - 11y + 18 &\quad 0 \\ 11x - 7y + 1 &\quad 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 17x - 7y &= 52 \\ 3x &= 2y \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 9x + 5y &\quad 124 \\ 7x &= 3y \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 15x + 7y &= 246 \\ 9x &= 4y \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 9x &= 8y \\ 10x + 23y - 287 &= 0 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ 7x - 11y + 92 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 10x - 9y - 102 &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 13x - 12y + 15 &= 0 \\ 8x - 7y &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 11x - 10y + 82 &= 0 \\ 14x - 9y &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(x + y) + \tfrac{1}{4}(x - y) &= 59 \\ 5x - 33y &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} \frac{4x + 5y}{40} &= x - y \\ \frac{2x - y}{3} + 2y &= 20 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} y(3 + x) &= x(7 + y) \\ 4x + 9 &= 5y - 14 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} \frac{4y - 6}{x + y} &= \\ \frac{8x - 5}{y - x} &= \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} (x + 5)(y + 7) &= (x + 1)(y - 9) + 112 \\ 2x + 10 &= 3y + 1 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 4x - 5y + 2z &= 0 \\ 2x - 7y + 4z &= 0 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 5x + 6y + 8z &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \\ x + 5y + 16z &= 3 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2x - 7y + 11z &= 0 \\ 6x - 8y + 7z &= 0 \\ 3x + 4y + 5z &= 35 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 7x + 3y - 8z &= \\ 5x - 7y + 8z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 64 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 9x - 8y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 36 \end{aligned}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

31. $\begin{aligned} 2(4x + 9y) &= 7(2y + z) \\ 7(x + 2y) &= 8(y + z) \\ 3x + 4y + 5z &= 38 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 4(x + y) &= 3(2z - y) \\ 5(x - 2y) &= 3(2y - 3z) \\ 6(x - 2) + 7(y - 3) + 8(z - 4) &= 67 \end{aligned}$

33. $\left.\begin{array}{l}5x=2y,\ 7y=5z\\ 4x+5y+6z=150\end{array}\right\}$ **34.** $\left.\begin{array}{l}15x=10y=6z\\ 7x+8y+9z=332\end{array}\right\}$

35. $4x-13y+8z=0$
$7x+6y-9z=0$
$\frac{5}{x}+\frac{8}{y}+\frac{15}{z}=6\frac{2}{3}$

নিম্নলিখিতরূপ সহ-সমীকরণের সমাধান:

182. $a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\ \ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$
$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফলটি হইতে দ্বিতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1. \quad \ldots \quad (1)$$

তদ্রূপ, প্রথম সমীকরণটিকে c_3 দ্বারা এবং তৃতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফল হইতে তৃতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1. \quad \ldots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) হইতে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে x এবং y এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। তৎপরে, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিতে x এবং y এর এতল্লব্ধ মান বসাইয়া z এর মান নির্ণয় করা যায়।

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method):

প্রথম সমীকরণটিকে d_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে d_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y+(c_1d_2-c_2d_1)z=0. \quad \ldots \quad (ক)$$

তদ্রূপ, প্রথম সমীকরণটিকে d_3 দ্বারা এবং তৃতীয়টিকে d_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথমটি হইতে তৃতীয়টিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_3-a_3d_1)x+(b_1d_3-b_3d_1)y+(c_1d_3-c_3d_1)z=0. \quad \ldots \quad (খ)$$

এখন, স্পষ্টতঃ, (ক) ও (খ) দ্বারা সূচিত সমীকরণদ্বয় এবং প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিকে, সহ-সমীকরণরূপে ধরিয়া লইয়া, পূর্ব্বনিয়মে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে উহাদের সমাধান করা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর : $4x-3y+2z=40$ ... ... (1)
$5x+9y-7z=47$ ... ... (2)
$9x+8y-3z=97$ ... ... (3)

(1) কে 7 দ্বারা এবং (2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$28x-21y+14z=280$
এবং $10x+18y-14z=94$

অতএব, যোগ করিয়া, $38x-3y=374$. ... ... (4)

আবার, (1) কে 3 দ্বারা এবং (3) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$12x-9y+6z=120$
এবং $18x+16y-6z=194$

অতএব, যোগ করিয়া, $30x+7y=314$. ... ... (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে স্পষ্টতঃ, $38x-3y-374=0$
এবং $30x+7y-314=0$.

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{3\times 314-7.(-374)}=\frac{y}{(-374).30-(-314).38}=\frac{1}{38\times 7-30.(-3)};$$

অথবা, $$\frac{x}{942+2618}=\frac{y}{-11220+11932}=\frac{1}{266+90}$$

অথবা, $$\frac{x}{3560}=\frac{y}{712}=\frac{1}{356}.$$

অতএব, $x=10$ এবং $y=2$.

x এবং y এর এই লব্ধ মান (1) এ বসাইয়া,

$40-6+2z=40$; $\therefore z=3$.

অতএব, $x=10$, $y=2$ এবং $z=3$.

উদা. 2. সমাধান কর : $2x-4y+9z=28$ ... ... (1)
$7x+3y-5z=3$ ... ... (2)
$9x+10y-11z=4$ ... ... (3)

(1) কে 3 দ্বারা, এবং (2) কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া,

$6x-12y+27z=84$
এবং $28x+12y-20z=12$

সুতরাং, যোগ করিয়া, $34x+7z=96$. (4)

আবার, (2) কে 10 দ্বারা, এবং (3) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left.\begin{aligned} 70x+30y-50z&=30 \\ \text{এবং}\quad 27x+30y-33z&=12 \end{aligned}\right\}$$

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $43x-17z=18.$ ... (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে,

$$\left.\begin{aligned} 34x+\ \ 7z-96&=0 \\ \text{এবং}\quad 43x-17z-18&=0 \end{aligned}\right\}$$

অতএব, $$\frac{x}{7.(-18)-(-17).(-96)}=\frac{z}{(-96).43-(-18).34}$$

$$=\frac{1}{34.(-17)-43\times 7};$$

$$\frac{x}{-126-1632}=\frac{z}{-4128+612}=\frac{1}{-578-301};$$

অথবা, $$\frac{x}{-1758}=\frac{z}{-3516}=\frac{1}{-879}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-1758}{-879}=2 \text{ এবং } z=\frac{-3516}{-879}=4.$$

x এবং z এর এই মান (2) এ বসাইয়া, $14+3y-20=3,$

অতএব, $3y=9,$ এবং $\therefore\ y=3.$

সুতরাং, $x=2,\ y=3$ এবং $z=4.$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} 12x+9y-\ \ 7z&=2 \quad \cdots \quad (1) \\ 8x-26y+\ \ 9z&=1 \quad \cdots \quad (2) \\ 23x+21y-15z&=4 \quad \cdots \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $16x-52y+18z=2,$

আবার, $12x+9y-\ \ 7z=2.$ ... (1)

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $4x-61y+25z=0.$ ... (4)

আবার, (1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$24x+18y-14z=4,$

এবং $23x+21y-15z=4.$ ... (3)

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $x-3y+z=0.$ ... (5)

এখন, যেহেতু
$$\left.\begin{aligned} 4x - 61y + 25z &= 0, \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)\\ x - 3y + z &= 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)\end{aligned}\right\}$$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{-61+75} = \frac{y}{25-4} = \frac{z}{-12+61},$$

অথবা, $\frac{x}{14} = \frac{y}{21} = \frac{z}{49}$; অর্থাৎ, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$.

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া,

$$x = 2k, \quad y = 3k, \quad z = 7k.$$

স্নুতরাং, (1) হইতে, $k(24 + 27 - 49) = 2$,

অথবা, $2k = 2$; $\therefore \ k = 1$.

অতএব, $x = 2$, $y = 3$ এবং $z = 7$.

প্রশ্নমালা 97

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 11\\ 5x + 2y - 7z &= -12\\ -4x + 3y + z &= 5\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 32\\ 2x + 5y + 3z &= 31\\ 5x + 3y + 2z &= 27\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1\\ 8x + 3y - 6z &= 1\\ 3z - 4x - y &= 1\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 29\\ 3x + 2y + 5z &= 32\\ 4x + 3y + 2z &= 25\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 16\\ 3x + 2y - 5z &= 8\\ 5x - 6y + 3z &= 6\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 8\\ 3x - 4y + 5z &= 6\\ -6x + 5y + 7z &= -1\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} 8x - 7y - 5z &= 1\\ -7x + 5y + 6z &= -1\\ 12x - 8y - 11z &= 2\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} x + 5y - 4z &= 5\\ 3x - 2y + 2z &= 14\\ -10x + 8y + z &= 6\end{aligned}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1867.]

9. $\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 5z &= 49\\ 3x + 5y + 6z &= 64\\ 4x + 3y + 4z &= 55\end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 10\\ 3x + 5y + 7z &= 14\\ 5x + 7y + 8z &= 15\end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} 12x + 8y - 11z = -3 \\ 11x - 13y - z = 2 \\ 8x + 17y - 12z = -2 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} 5x - 4y + 9z = 19 \\ 7x + 6y - 12z = 16 \\ -9x + 8y + 15z = -13 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} x - y - z = -15 \\ y + x + 2z = 40 \\ 4z - 5x - 6y = -150 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

14. $\left.\begin{array}{l} 2(x - y) = 3z - 2 \\ x - 3z = 3y - 1 \\ 2x + 3z = 4(1 - y) \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = 20 \\ 2x + 3y + 6z = 70 \\ x - y + 6z = 41 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} 4(y - x) = 5z - 22 \\ 3z + 4x = 6y + 2 \\ z - 3y = 14 - 10x \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 5x + 2y + z = 30 \\ \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{10}z = 4 \\ 2x + 5y + 10z = 129 \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 12 - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}x = 8 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 10 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1868.]

19. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{y} - \dfrac{4}{z} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = \dfrac{19}{24} \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{6}{z} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{5y} + \dfrac{1}{z} = 7\frac{3}{5} \\ \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{2}{z} = 10\frac{1}{6} \\ \dfrac{4}{5x} - \dfrac{1}{2y} + \dfrac{4}{z} = 16\frac{1}{10} \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 65 \\ 2y - z = 11 \\ 3x + 4z = 57 \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{z} - \dfrac{2}{y} = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y - 11 = 0 \\ 5y - 6z = -8 \\ 7z - 8x - 13 = 0 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1877.]

25. $\left.\begin{array}{l} 3y + x - 2 = 0 \\ 3z - 4y = x + 15 \\ 2x + 7z = 7 \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

183. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1, \quad \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 1, \quad \dfrac{c}{z} + \dfrac{a}{x} = 1.$

প্রদত্ত সমীকরণগুলি যোগ করিয়া,

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=3,$$

অথবা, $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (ক)$$

(ক) হইতে দ্বিতীয় সমীকরণটি বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{2}; \qquad \therefore \quad x=2a.$$

এইরূপে, $y=2b$ এবং $z=2c$.

উদা. 2. সমাধান কর :

(i) $\dfrac{xy}{x+y}=1$; (ii) $\dfrac{xz}{x+z}=2$; (iii) $\dfrac{yz}{y+z}=3$.

এখন, (i) হইতে, $\dfrac{x+y}{xy}=1$, অথবা, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1$; ... (1)

(ii) „ $\dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{2}$, অথবা, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$; ... (2)

(iii) „ $\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{3}$, অথবা, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$. ... (3)

(1), (2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{x}=\frac{11}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}; \qquad \therefore \quad x=\tfrac{12}{7}.$$

(4) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{y}=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}; \qquad \therefore \quad y=\tfrac{12}{5}.$$

(4) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{z}=\frac{11}{12}-1=-\frac{1}{12}; \qquad \therefore \quad z=-12.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz)$
$= c(xy - yz - zx)$.

যেহেতু, $xyz = a(yz - zx - xy)$,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\ ; \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (1)$$

[উভয় পক্ষকেই $a \times xyz$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

এইরূপে, $$\frac{1}{b} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \qquad \ldots \qquad (2)$$

এবং $$\frac{1}{c} = \frac{1}{z} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \qquad (3)$$

(2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$-\frac{2}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} \qquad x = \frac{-2bc}{b+c}.$$

এইরূপে, $$-\frac{2}{y} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ac} \qquad y = \frac{-2ca}{c+a},$$

এবং $$-\frac{2}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \qquad z = \frac{-2ab}{a+b}.$$

|. 4. সমাধান কর : $x + y + z = 0$
$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$
$bcx + cay + abz = 1$

যেহেতু, $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$
এবং $x + y + z = 0$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{(c+a)-(a+b)} = \frac{y}{(a+b)-(b+c)} = \frac{z}{(b+c)-(c+a)},$$

অথবা, $$\frac{x}{c-b} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{b-a}.$$

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া,

$$x = k(c-b),\ y = k(a-c),\ z = k(b-a).$$

x, y এবং z এর উপরোক্ত মানগুলি তৃতীয় সমীকরণটিতে বসাইয়া,

$$k\{bc(c-b) + ca(a-c) + ab(b-a)\} = 1.$$

কিন্তু, $bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$

$$=bc(c-b)+a^2(c-b)-a(c^2-b^2)$$
$$=(c-b)\{bc+a^2-a(c+b)\}$$
$$=(c-b)(a-c)(a-b).$$

অতএব, $k(c-b)(a-c)(a-b)=1$; $\therefore\ k=\frac{1}{(c-b)(a-c)(a-b)}$.

সুতরাং, $x=k(c-b)=\frac{1}{(a-c)(a-b)}$;

$$y=k(a-c)=\frac{1}{(c-b)(a-b)};$$

$$z=k(b-a)=\frac{1}{(c-b)(c-a)}.$$

প্রশ্নমালা 98

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c.$

3. $\frac{yz}{y+z}=a,\quad \frac{zx}{z+x}=b,\quad \frac{xy}{x+y}=c.$

4. $\left.\begin{array}{l} axy=c(bx+ay) \\ bxy=c(ax-by) \end{array}\right\}$

5. $3xy=4(x+y),\quad 2xz=3(x+z),\quad 5yz=12(y+z).$

6. $y+z=4,\quad z+x=6,\quad x+y=8.$

7. $y+z-x=6,\quad z+x-y=10,\quad x+y-z=14.$

8. $\left.\begin{array}{l} x-4y+z=-10 \\ y-4z+x=-15 \\ z-4x+y=-35 \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} y+z-7x+16=0 \\ z+x-7y+24=0 \\ x+y-7z+40=0 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} a^2x+b^2y=2ab(a+b) \\ b(2a+b)x+a(a+2b)y=a^3+a^2b+ab^2+b^3 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=A \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0 \\ abx+acy+bcz=1 \end{array}\right\}$

13. $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= 0 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned} x - ay + a^2z &= a^3 \\ x - by + b^2z &= b^3 \\ x - cy + c^2z &= c^3 \end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \end{aligned}\right\}$$

16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, নিম্নলিখিত সমীকরণ তিনটি, x ও y এর একই মান দ্বারা, সিদ্ধ হইবে ?

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

17. নিম্নলিখিত সমীকরণ চারিটি x, y ও z এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হইলে, a এর মান কত হইবে ?

$$2x - 3y + 5z = 18, \quad 3x - y + 4z = 20, \quad 4x + 2y - z = 5,$$
$$(a+1)x + (a+2)y + (a+3)z = 76.$$

18. $$\left.\begin{aligned} 3w - 2y &= 2 \\ 5x - 7z &= 11 \\ 2x + 3y &= 39 \\ 4y + 3z &= 41 \end{aligned}\right\}$$

19. $$\left.\begin{aligned} 9x - 2z + w &= 41 \\ 7y - 5z - t &= 12 \\ 4y - 3x + 2w &= 5 \\ 3y - 4w + 3t &= 7 \\ 7z - 5w &= 11 \end{aligned}\right\}$$

20. $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= ab + bc + ca \\ \frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} + \frac{z}{ca} &= 3 \\ (c-b)x + (a-b)y + (c-a)z &= 2abc - ab^2 - b^2c - ac^2 - a^2c. \end{aligned}\right\}$$

II. একাধিক অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণোৎপাদক প্রশ্নাবলী :

(Problems producing Simultaneous Equations involving more than one unknown quantity)

184. অষ্টাদশ অধ্যায়ে আলোচিত প্রশ্নাবলী অপেক্ষা জটিলতর প্রশ্নাবলী সম্পর্কে এক্ষণে আলোচনা করা হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিকে দৃষ্টান্তরূপে সন্নিবেশিত করা হইল।

উদা. 1. একটি পাত্র 'P' তে 12 গ্যালন মদ ও 18 গ্যালন জল, এবং অপর একটি পাত্র 'Q' তে 9 গ্যালন মদ ও 3 গ্যালন জল আছে। প্রত্যেকটি পাত্র হইতে কত পরিমাণ লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণে 7 গ্যালন মদ ও 7 গ্যালন জল থাকিবে ?

P পাত্রস্থিত মিশ্রণে, মোট 30 গ্যালনের মধ্যে 12 গ্যালন মদ আছে ; অতএব, এই মিশ্রণের $\frac{12}{30}$, অর্থাৎ, $\frac{2}{5}$ ভাগ মদ, এবং $\therefore$ $\frac{3}{5}$ ভাগ জল আছে।

সুতরাং, P হইতে গৃহীত প্রতি গ্যালনের মধ্যে, $\frac{2}{5}$ ভাগ মদ ও $\frac{3}{5}$ ভাগ জল থাকিবে।

এইরূপে, Q হইতে গৃহীত প্রতি গ্যালনের মধ্যে, $\frac{3}{4}$ ভাগ মদ ও $\frac{1}{4}$ ভাগ জল থাকিবে।

ধর, P হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা $= x$,

এবং Q হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা $= y$.

তাহা হইলে, যেহেতু, P হইতে গৃহীত x গ্যালনের মধ্যে $\frac{2}{5}x$ গ্যালন মদ ও $\frac{3}{5}x$ গ্যালন জল, এবং Q হইতে গৃহীত y গ্যালনের মধ্যে $\frac{3}{4}y$ গ্যালন মদ ও $\frac{1}{4}y$ গ্যালন জল থাকিবে,

অতএব, নূতন মিশ্রণে, $(\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y)$ গ্যালন মদ এবং $(\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y)$ গ্যালন জল থাকিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x + \tfrac{3}{4}y &= 7 \; ; \quad \cdots \quad (1) \\ \text{এবং} \quad \tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{4}y &= 7. \quad \cdots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

(2) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া, গুণনলব্ধ সমীকরণ হইতে (1) কে বিয়োগ করিয়া,

$$\tfrac{7}{5}x = 14 \; ; \qquad \therefore \quad x = 10.$$

অতএব, (2) হইতে, $y = 4(7 - \frac{3}{5} \times 10) = 4.$

সুতরাং, P হইতে 10 গ্যালন এবং Q হইতে 4 গ্যালন লইতে হইবে।

উদা. 2. 120 গজ যাইতে একখানা গাড়ীর সম্মুখের চাকা, উহার পিছনের চাকা হইতে 6 বার বেশী ঘোরে ; সম্মুখের চাকার পরিধিকে, বর্ত্তমান পরিধির $\frac{1}{4}$ অংশ পরিমিত বর্দ্ধিত করিলে এবং পিছনের চাকার পরিধিকে, উহার বর্ত্তমান পরিধির $\frac{1}{5}$ অংশ পরিমিত বর্দ্ধিত করিলে, সম্মুখের চাকা পিছনের চাকা হইতে মাত্র 4 বার বেশী ঘুরিবে। প্রত্যেক চাকার পরিধি নির্ণয় কর।

ধর, সম্মুখের চাকার পরিধি x গজ এবং পিছনের চাকার পরিধি y গজ।

তাহা হইলে, চাকাগুলি 120 গজ যাইতে, যথাক্রমে $\dfrac{120}{x}$ এবং $\dfrac{120}{y}$ বার ঘুরিবে।

সম্মুখের এবং পিছনের চাকার পরিধিদ্বয়কে, যথাক্রমে $\frac{1}{4}$ অংশ এবং $\frac{1}{5}$ অংশ বর্দ্ধিত করিলে, উহাদের নূতন পরিধিদ্বয় যথাক্রমে, $\left(x+\frac{x}{4}\right)$ এবং $\left(y+\frac{y}{5}\right)$ গজ, অর্থাৎ, $\frac{5x}{4}$ ও $\frac{6y}{5}$ গজ হইবে। অতএব, 120 গজ যাইতে চাকাগুলি, যথাক্রমে, $120 \div \frac{5x}{4}$ বার, অর্থাৎ, $\frac{96}{x}$ বার এবং $120 \div \frac{6y}{5}$ বার, অর্থাৎ, $\frac{100}{y}$ বার ঘুরিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{120}{x}=\frac{120}{y}+6 ; \quad \ldots \quad \ldots$$

এবং $$\frac{96}{x}=\frac{100}{y}+4.$$

(1) কে 5 দ্বারা, এবং (2) কে 6 দ্বারা গুণ করিয়া

$$\frac{600}{x}=\frac{600}{y}+30 ;$$

এবং $$\frac{576}{x}=\frac{600}{y}+24 ;$$

বিয়োগ করিয়া, $\frac{24}{x}=6$; $\quad x=4.$

অতএব, (1) হইতে, $\frac{120}{y}=\frac{120}{4}-6=24$; $\quad y=5.$

সুতরাং, সম্মুখের ও পিছনের চাকার পরিধি যথাক্রমে, 4 এবং 5 গজ।

উদা. 3. এক পাউণ্ড্ চা এবং তিন পাউণ্ড্ চিনির মূল্য মোট 6 শিলিং ; কিন্তু চিনি ও চায়ের মূল্য যথাক্রমে শতকরা 50 শি. ও 10 শি. হিসাবে বাড়িলে, উহাদের মূল্য মোট 7 শিলিং হইবে। চা এবং চিনির প্রত্যেকের মূল্য নির্ণয় কর।

ধর, এক পাউণ্ড্ চায়ের মূল্য x শিলিং এবং এক পাউণ্ড্ চিনির মূল্য y শিলিং।

তাহা হইলে, স্পষ্টতঃ, $x+3y=6.$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad$ (1)

চায়ের মূল্য শতকরা 10 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউণ্ড্ চায়ের মূল্য $=\left(x+\frac{x}{10}\right)$, অর্থাৎ, $\frac{11}{10}x$ শিলিং ; এবং চিনির মূল্য শতকরা 50 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউণ্ড্ চিনির মূল্য $=\left(y+\frac{y}{2}\right)$, অর্থাৎ, $\frac{3y}{2}$ শিলিং।

অতএব, $$\frac{11}{10}x+3 . \frac{3y}{2}=7. \quad (2)$$

(2) হইতে, $\frac{11}{5}x + 9y = 14$; (3)

এবং (1) হইতে, $3x + 9y = 18$; (4)

$\therefore$ (4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $(3 - \frac{11}{5})x = 4$;

অথবা, $\frac{4x}{5} = 4$; $\therefore$ $x = 5$.

অতএব, (1) হইতে, $y = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$.

সুতরাং, এক পাউণ্ড্ চায়ের মূল্য 5 শিলিং এবং এক পাউণ্ড্ চিনির মূল্য $\frac{1}{3}$ শি., অর্থাৎ 4 পেন্স।

উদা. 4. কতক্ পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের মধ্যে ভাগ করিয়া দিতে হইবে ; তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে 150 পাউণ্ড্ করিয়া বেশী পাইত; কিন্তু 6 জন লোক বেশী হইলে, প্রত্যেকে 120 পাউণ্ড্ করিয়া কম পাইত। অর্থের পরিমাণ এবং লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

ধর, x পাউণ্ড্ পরিমিত অর্থ, y সংখ্যক লোকের মধ্যে ভাগ করিতে হইবে।

অতএব, প্রত্যেক লোক $\frac{x}{y}$ পাউণ্ড্ পাইবে ; তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y-3}$ পাউণ্ড্ করিয়া পাইত ; এবং 6 জন বেশী হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y+6}$ পাউণ্ড্ করিয়া পাইত

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{x}{y-3} = \frac{x}{y} + 150$, ... (1)

এবং, $\frac{x}{y+6} = \frac{x}{y} - 120$. ... (2)

(1) হইতে, $150 = x\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right) = \frac{3x}{y^2 - 3y}$; $x = 50(y^2 - 3y)$.

(2) হইতে, $120 = x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6}\right) = \frac{6x}{y^2 + 6y}$; $\therefore$ $x = 20(y^2 + 6y)$.

অতএব, $50(y^2 - 3y) = 20(y^2 + 6y)$,

$30y^2 = (150 + 120)y = 270y$;

যেহেতু, y এর মান 0 হইতে পারে না, $\therefore$ $y = 9$.

$\therefore$ $x = 20(81 + 54) = 20 \times 135 = 2700$.

অতএব, নির্ণেয় লোকসংখ্যা = 9, এবং অর্থের পরিমাণ = £2700.

উদা. 5. কোন পথিক 40 মাইল ভ্রমণ করিবার পর তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় 2 মাইল হিসাবে, বাড়াইল। কিন্তু প্রথম হইতেই এই বর্দ্ধিত বেগে ভ্রমণ করিতে পারিলে, সে 40 মিনিট পূর্ব্বে তাহার গন্তব্যস্থানে পৌছিতে পারিত; আবার পূর্ব্বের বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে 20 মিনিট পরে আসিয়া পৌছিত। সে কত পথ ভ্রমণ করিয়াছিল?

ধর, ঐ পথিক ঘণ্টায় y মাইল বেগে প্রথম 40 মাইল পথ, এবং সর্ব্বশুদ্ধ x মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

স্থতরাং, ভ্রমণ শেষ করিবার প্রকৃত সময় $=\left(\dfrac{40}{y}+\dfrac{x-40}{y+2}\right)$ ঘণ্টা $=\dfrac{80+xy}{y(y+2)}$ ঘণ্টা।

কিন্তু, বর্দ্ধিত বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে $\dfrac{x}{y+2}$ ঘণ্টায় ভ্রমণ শেষ করিতে পারিত; এবং পূর্ব্বের বেগে চলিলে, $\dfrac{x}{y}$ ঘণ্টায় সে ভ্রমণ শেষ করিত।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{x}{y+2}=\frac{80+xy}{y(y+2)}-\frac{2}{3} \qquad (1)$$

এবং
$$\frac{x}{y}=\frac{80+xy}{y(y+2)}+\frac{1}{3} \qquad (2)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $x\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+2}\right)=1$;

অথবা, $2x=y(y+2)$. … (3)

আবার, (2) হইতে, $3x(y+2)=3(80+xy)+y(y+2)$;

অথবা, $6x-240=y(y+2)$. … … (4)

অতএব, (3) এবং (4) হইতে, $6x-240=2x$;

অথবা, $4x=240$; $\therefore\ x=60$.

স্থতরাং, ঐ ব্যক্তি 60 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

উদা. 6. A হইতে B পর্য্যন্ত যাইতে ঘোড়ার গাড়ীতে যে সময় লাগে, কোনরূপ দুর্ঘটনা না ঘটিলে, রেলগাড়ীতে তাহার ঠিক অর্দ্ধসময় আবশ্যক হয়। রেলগাড়ীতে আকস্মিক দুর্ঘটনার জন্য পথিমধ্যে 3 ঘণ্টা বিলম্ব হইলেও যে সময়ে সমস্ত পথ ভ্রমণ করা যাইতে পারে, ঘোড়ার গাড়ীতে ঐ সময়ে সমস্ত পথ হইতে 15 মাইল কম পথ গমন করা যায়; কিন্তু সম্পূর্ণ পথ যদি বর্ত্তমান পথের $\frac{4}{5}$ অংশ হইত, তাহা হইলে, রেলগাড়ীর দুর্ঘটনার জন্য পূর্ব্বানুরূপ 3 ঘণ্টা বিলম্ব ধরিয়া লইলে, সম্পূর্ণ পথ গমন করিতে, ঘোড়ার গাড়ীর ও রেলগাড়ীর ঠিক একই সময় দরকার হইত। A হইতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, A হইতে B এর দূরত্ব $=x$ মাইল ; এবং ঘোড়ার গাড়ী ঘণ্টায় y মাইল বেগে গমন করে। তাহা হইলে, স্পষ্টতঃ, রেলগাড়ীর গতি ঘণ্টায় $2y$ মাইল।

এখন, (রেলগাড়ীতে A হইতে B তে যাওয়ার সময়) $+3$ ঘণ্টা $=$ ঘোড়ার গাড়ীতে $(x-15)$ মাইল পথ যাওয়ার সময়।

অতএব, $$\frac{x}{2y}+3=\frac{x-15}{y} \qquad (1)$$

এবং $$\frac{\frac{2}{3}x}{2y}+3=\frac{\frac{2}{3}x}{y}, \qquad \text{অথবা,} \quad \frac{x}{3y}+3=\frac{2x}{3y} \qquad (2)$$

(2) হইতে, $\frac{x}{3y}=3$, অথবা, $x=9y$. ... (3)

(1) হইতে, $x+6y=2x-30$ অথবা, $6y=x-30$. ... (4)

অতএব, (3) এবং (4) হইতে, $6y=9y-30$; অথবা, $y=10$;

$$\therefore \quad x=9\times10=90.$$

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব $=90$ মাইল।

উদা. 7. কোন নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে 44 মাইল গমন করিল ; এবং 13 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল এবং উহার অনুকূলে 55 মাইল পথ অতিক্রম করিল। স্রোতের বেগ ও নৌকার গতি নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.]

ধর, স্রোতবিহীন জলে, নৌকাখানি, ঘণ্টায় x মাইল বেগে গমন করে ; এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল।

তাহা হইলে, এক ঘণ্টায় নৌকাখানি স্রোতের অনুকূলে $x+y$ মাইল এবং প্রতিকূলে $x-y$ মাইল গমন করে।

অতএব, স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল যাইতে নৌকাখানির $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টা, এবং অনুকূলে 44 মাইল যাইতে উহার $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টা লাগিবে। অতএব, প্রশ্নপ্রদত্ত প্রথম সর্তানুসারে,

$$\frac{30}{x-y}+\frac{44}{x+y}=10 \; ; \qquad \cdots \qquad (1)$$

তদ্রূপ, দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $$\frac{40}{x-y}+\frac{55}{x+y}=13 \; ; \qquad (2)$$

(1) কে 4 দ্বারা, এবং (2) কে 3 দ্বারা, গুণ করিয়া,

$$\frac{120}{x-y}+\frac{176}{x+y}=40\ ;$$

এবং $$\frac{120}{x-y}+\frac{165}{x+y}=39\ ;$$

∴ বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{11}{x+y}=1\ ;\quad \text{অথবা,}\quad x+y=11. \tag{3}$$

অতএব, (1) হইতে, $\frac{30}{x-y}=10-4=6$; ∴ $x-y=5.$ (4)

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $2x=16$; $x=8.$

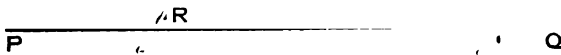
আবার, (3) ও (4) বিয়োগ করিয়া, $2y=6$; $y=3.$

অতএব, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, এবং নৌকার গতি ঘণ্টায় 8 মাইল হইবে।

উদা. 8. 1040 গজ দূরত্বের সাইকেল-ভ্রমণ প্রতিযোগিতায় B 120 গজ পথ অতিক্রম করিবার পর A রওনা হইল এবং B অপেক্ষা মাত্র 5 সেকেণ্ড্ পরে নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌছিল ; পরবর্ত্তী বারে, A, B এর পাঁচ সেকেণ্ড্ পরে রওনা হইয়া, B কে 120 ফুট দূরত্বে হারাইল। প্রত্যেকে কত সময়ে নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল ?

মনে কর, নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে A এর x সেকেণ্ড্ এবং B এর y সেকেণ্ড্ সময় লাগিয়াছিল। তাহা হইলে, এক গজ যাইতে, A এর $\frac{x}{1040}$ সেকেণ্ড্ এবং B এর $\frac{y}{1040}$ সেকেণ্ড্ লাগিয়াছিল।

R

P Q

ধর, উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে, PQ নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব, এবং PR ও SQ যথাক্রমে 120 গজ ও 120 ফুট (অর্থাৎ 40 গজ) দূরত্ব সূচিত করিতেছে।

প্রতিযোগিতার প্রথম বারে, B, R পর্য্যন্ত পৌছিলে পর, A, P হইতে রওনা হইয়া B অপেক্ষা 5 সেকেণ্ড্ পরে Q তে পৌছিল। অতএব, B এর RQ দূরত্ব অতিক্রম করিতে $(x-5)$ সেকেণ্ড্ সময় লাগিল।

সুতরাং, $$x-5=(1040-120)\times\frac{y}{1040}=(1-\tfrac{3}{26})y=\tfrac{23}{26}y. \tag{1}$$

দ্বিতীয় বারে, A, B এর 5 সেকেণ্ড্ পরে রওনা হইয়া, যখন Q তে পৌছিল, তখন B, P হইতে রওনা হইয়া মাত্র S পর্য্যন্ত যাইতে পারিল। অতএব, PS দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর মোট $(x+5)$ সেকেণ্ড্ সময় লাগিল।

স্থতরাং, $x+5=(1040-40)\times\frac{y}{1040}=(1-\frac{1}{26})y=\frac{25}{26}y.$ ... (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $\frac{2}{26}y=10$; $\therefore\ y=130.$

অতএব, (1) হইতে, $x=5+\frac{23}{26}\times130=5+115=120.$

কাজেই, A ও B এর, নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিবার সময় যথাক্রমে 120 সেকেণ্ড্ ও 130 সেকেণ্ড্।

স্থতরাং, A, 2 মিনিটে এবং B, 2 মিনিট 10 সেকেণ্ডে উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল।

উদা. 9. কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, অঙ্কটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [B. C. S., 1923.]

সংখ্যাটি এক অঙ্কবিশিষ্ট হইলে, উহা স্পষ্টতঃই 9; অতএব, উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি এক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার বেলায় অক্ষুণ্ণ রহিল।

এখন, দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা লও; এবং ধর, উহার দশকস্থানীয় অঙ্কটি y দ্বারা, এবং এককস্থানীয় অঙ্কটি x দ্বারা স্থচিত হইতেছে। তাহা হইলে, সংখ্যাটি অবশ্যই $=10y+x$.

এখন, $\frac{10y+x}{9}=y+\frac{y+x}{9}.$

কাজেই, $y+x$ (অর্থাৎ, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি) 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটি (অর্থাৎ, $10y+x$)ও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এইরূপভাবে, দুই এর অধিক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা লইয়া, দেখান যাইতে পারে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

প্রশ্নমালা 99

1. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহা, তদন্তর্গত অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির 25 গুণ হইবে; এবং যাহার সহিত 198 যোগ করিলে লব্ধ যোগফল, প্রদত্ত সংখ্যার

অঙ্ক তিনটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহার সমান হইবে; এবং যাহার মধ্যস্থিত অঙ্কটি পার্শ্বস্থিত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি হইতে 1 বেশী হইবে।

2. এক দোকানদার, তাহার হিসাব-বহি পরিষ্কাররূপে লিখিয়া না রাখায় কোন একটি জিনিষের, কত ওজন, বা কত ক্রয়-মূল্য, কিছুই স্মরণ করিতে পারিল না; শুধু, এই মাত্র স্মরণ করিতে পারিল যে, সে জিনিষটি কিনিবার পর মনে করিয়াছিল যে, উহার প্রতি পাউণ্ড্ 30 শি. দরে বিক্রয় করিলে, তাহার £5 লাভ হইবে, কিন্তু 22 শি. দরে বিক্রয় করিলে, £15 লোকসান হইবে। জিনিষটির ওজন, এবং ক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

3. A এবং B এই দুই ব্যক্তি বাজী ধরিয়া তাস খেলিতে আরম্ভ করিল। কয়েকবার খেলার পর A দেখিতে পাইল যে, সে যত অর্থ লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল, তাহার অর্দ্ধ পরিমাণ জিতিয়াছে এবং তাহার যদি আরও 15 শি. থাকিত, তাহা হইলে, তাহার অর্থের পরিমাণ B এর অর্থের তিনগুণ হইত। কিন্তু, B, তারপর 10 শি. জিতিল বলিয়া, B এর অর্থের পরিমাণ তখন A এর অর্থের দ্বিগুণ হইল। প্রত্যেকে কত লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল?

4. A এবং B একত্রে কোন একটি কাজ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। কিন্তু B, 15 দিন ধরিয়া এবং C, 30 দিন ধরিয়া পর পর কাজ করিয়া যাইলেও উহা সম্পূর্ণরূপে সম্পন্ন হইত। আবার, A, B, C যদি একত্রে কাজ করিত, তাহা হইলে উহা শেষ করিতে তাহাদের মাত্র 10 দিন সময় লাগিত। প্রত্যেকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে কতদিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে?

5. A এর নিকট যতগুলি শিলিং আছে, তাহার দ্বিগুণসংখ্যক পেনি আছে; B এর নিকট A অপেক্ষা 8 পে. বেশী আছে, এবং উহাতে যতগুলি পেনি, তাহার দ্বিগুণসংখ্যক শিলিং আছে; A ও B এর মোট তহবিলে, 'শিলিং'এর সংখ্যা হইতে পেনির সংখ্যা এক বেশী। প্রত্যেকের নিকট কি পরিমাণ অর্থ আছে, তাহা নির্ণয় কর।

6. কোন কাজ, A ও B দুইজনে m দিনে শেষ করিতে পারে; উভয়ে একত্রে n দিন কাজ করার পর A কে সরাইয়া দেওয়া হইল, এবং B উক্ত কাজের বাকী অংশ p দিনে সম্পন্ন করিল। প্রত্যেকে পৃথক্‌ভাবে ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারিবে?

7. A, B এবং C তাহাদের পরস্পরের অর্থের তুলনা করিতে গিয়া, A, B কে বলিল, "তুমি আমাকে 700 টাকা দিলে, তোমার নিকট যাহা থাকিবে, আমার তাহার দ্বিগুণ পরিমাণ হইবে;" আবার, B, C কে বলিল, "তুমি আমাকে 1400 টাকা দিলে, আমার অর্থের পরিমাণ তোমার অবশিষ্ট অর্থের তিনগুণ হইবে;" এবং C, A কে

বলিল, "তুমি আমাকে 420 টাকা দিলে, আমার অর্থ তোমার অবশিষ্ট অর্থের পাঁচগুণ হইবে।" কাহার কি পরিমাণ অর্থ ছিল ?

8. 35 মাইল পথ অতিক্রম করিতে একজন লোক, কতকাংশ পথ ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এবং অবশিষ্টাংশ ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে গমন করিল। যে পরিমাণ পথ সে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে অতিক্রম করিয়াছে, যদি উহা ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, এবং বাকী পথ ঘণ্টায় 4 মাইল গতিতে অতিক্রান্ত হইত, তাহা হইলে, সে পূর্ব্ব সময়ের মধ্যেই আরও দুই মাইল যাইতে পারিত। কত সময় ধরিয়া সে ভ্রমণ করিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

9. একখানা রেলগাড়ী বরাবর সমান বেগে কতক পরিমাণ পথ অতিক্রম করিল। উহার গতির বেগ ঘণ্টায় 6 মাইল করিয়া বেশী হইলে, ঐ পথ 4 ঘণ্টা কম সময়ে অতিক্রান্ত হইতে পারিত এবং গতির বেগ ঘণ্টায় 6 মাইল করিয়া কম হইলে, ঐ পথ যাইতে উহার 6 ঘণ্টা সময় বেশী লাগিত। রেলগাড়ীখানি কত পরিমাণ পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

10. দুইটি পাত্রের প্রত্যেকটিতে জল ও মদ মিশ্রিত আছে; একটিতে যত পরিমাণ জল তাহার তিনগুণ মদ, এবং অপরটিতে যত পরিমাণ মদ, তাহার পাঁচগুণ জল আছে। 7 গ্যালন ধরে এরূপ একটি পাত্র পূর্ণ করিতে হইলে, উপরোক্ত পাত্র দুইটির কোন্‌টি হইতে কত পরিমাণ লইতে হইবে, যাহাতে শেষোক্ত পাত্রস্থিত মিশ্রণে সম-পরিমাণ জল ও মদ থাকিতে পারে ?

11. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কত্রয়ের সমষ্টি 10; মধ্যস্থিত অঙ্কটি পার্শ্বস্থিত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান; এবং অঙ্ক তিনটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে যে সংখ্যা উৎপন্ন হয়, উহা প্রদত্ত সংখ্যা হইতে 99 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

12. কোন লোকের, অর্দ্ধ-ক্রাউন, শিলিং এবং 6-পেন্স, এই তিন প্রকারের মোট 20টি মুদ্রায় এক পাউণ্ড্ (£1) আছে। সে যদি সমুদয় 6-পেন্স মুদ্রাগুলিকে পেনিতে, এবং সমুদয় শিলিং মুদ্রাগুলিকে 6-পেন্স মুদ্রাতে পরিবর্ত্তিত করিত, তাহা হইলে, তাহার মোট 73টি মুদ্রা হইত। তাহার কোন্ প্রকারের কতগুলি মুদ্রা আছে ?

13. কতক পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের ভিতর সমান ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। কিন্তু লোকসংখ্যা 4 বেশী হইলে প্রত্যেকে এক শিলিং করিয়া কম পাইত, এবং লোকসংখ্যা 5 কম হইলে প্রত্যেকে 2 শিলিং করিয়া বেশী পাইত। কি পরিমাণ অর্থ কতজন লোকের ভিতর ভাগ করা হইল, তাহা নির্ণয় কর।

14. কোন চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিবার নিমিত্ত উহার সহিত তিনটি নল সংলগ্ন আছে; এবং উহাদের দুইটি নল সম্পূর্ণ এক আকারের। তিনটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া রাখিলে, 4 ঘণ্টায় চৌবাচ্চার $\frac{5}{12}$ অংশ পূর্ণ হয়; সমান নল দুইটির একটিকে বন্ধ রাখিলে,

10 ঘণ্টা 40 মিনিটে চৌবাচ্চার $\frac{7}{9}$ অংশ পূর্ণ হয়। প্রত্যেকটি নল পৃথক্‌ভাবে কত সময়ের ভিতর চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারিবে ?

15. কোন লোক 8 বুসেল্ বার্লি ও নগদ £2. 16 শি. এর বিনিময়ে 12 বুসেল্ ময়দা দিয়া, আরও কতক পরিমাণ ময়দার বিনিময়ে, হয় সমান পরিমাণ বার্লি ও নগদ £3. 15 শি., নতুবা, নগদ মোট £10, লইবে বলিয়া স্বীকৃত হইল ; এক বুসেল্ ময়দা এবং এক বুসেল্ বার্লির মূল্য নির্ণয় কর।

16. কোন মদ্যবিক্রেতার দুই প্রকারের মদ ছিল ; এক প্রকার, প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. দরের এবং অন্য প্রকার, প্রতি কোয়ার্ট 3 শি. 4 পে. দরের। ইহা হইতে তাহাকে, প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. 4 পে. দরের 100 কোয়ার্ট মদ তৈয়ার করিতে হইলে, প্রত্যেক প্রকার মদ হইতে কত পরিমাণ করিয়া লইতে হইবে ?

17. কোন জমির খাজানা বাবদ, নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ বার্লি এবং নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ ময়দা, ধার্য্য আছে ; যখন ময়দার দর প্রতি কোযার্টারে 55 শি., এবং বার্লির দর প্রতি কোয়ার্টারে 33 শি., তখন খাজানাতে, ময়দার অংশের এবং বার্লির অংশের মূল্য পরস্পর সমান। কিন্তু, ময়দা ও বার্লি, যথাক্রমে, প্রতি কোয়ার্টার 65 শি. ও 41 শি. দরে বিক্রয় হইলে, খাজানার পরিমাণ £7 বৃদ্ধি হয়। খাজানাতে ময়দার পরিমাণ ও বার্লির পরিমাণ নির্ণয় কর।

18. 60 গজ দীর্ঘ একখানা গতিশীল রেলগাড়ী, 72 গজ দীর্ঘ এবং সমান্তর পথে একই দিকে গতিশীল অপর একখানা রেলগাড়ীকে, 12 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। অপেক্ষাকৃত ধীরগামী গাড়ীখানির গতি যদি অর্দ্ধগুণ বর্দ্ধিত-করা হইত, তাহা হইলে দ্রুতগামী গাড়ীখানি উহাকে 24 সেকেণ্ডে আতক্রম করিত। প্রত্যেকখানি গাড়ী কত বেগে যাইতেছিল ?

19. কোন কৃষক, প্রতি বুসেল্ 3 শি. 4 পে. দরের 100 বুসেল্ মিশ্রণ প্রস্তুত করিতে, প্রতি বুসেল্ 2 শি. 4 পে. দরের 28 বুসেল্ বার্লির সহিত, প্রতি বুসেল্ 3 শিলিং দরের কত পরিমাণ 'রাই' এবং প্রতি বুসেল্ 4 শি. দরের কত বুসেল্ ময়দা, মিশ্রিত করিবে ?

20. গিনি ও ক্রাউন, এই দুই প্রকার মুদ্রায় কোন ব্যক্তির নিকট £27. 6 শি. ছিল। উহা হইতে £14. 17 শি. এর ঋণ পরিশোধ কারয়া তিনি দেখিতে পাইলেন যে, তিনি যতগুলি ক্রাউন দিয়াছেন, ঠিক ততগুলি গিনি, এবং যতগুলি গিনি দিয়াছেন, ঠিক ততগুলি ক্রাউন, তাঁহার নিকট উদ্বৃত্ত রহিয়াছে। কোন্ প্রকারের কতগুলি মুদ্রা তাঁহার নিকট ছিল, এবং কতগুলিই বা উদ্বৃত্ত রহিল ?

21. কোন লোক নৌকাযোগে স্রোতের অনুকূলে A হইতে B পর্য্যন্ত 18 মাইল পথ দেড় ঘণ্টায় যাইয়া, ঐ স্রোতেরই প্রতিকূলে B হইতে A তে সওয়া দুই ঘণ্টায় নদীর কিনারা ধরিয়া ফিরিয়া আসিল। নদীর কিনারার স্রোতের বেগ যদি মধ্যস্থিত স্রোতের বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ হয়, তবে মধ্যস্থিত স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

22. কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে B, 44 গজ দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া B কে 51 সেকেণ্ডে হারাইল; পরবর্ত্তী বারে, B, 1 মিনিট 15 সেকেণ্ড দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া B এর নিকট 88 গজে হারিল। এক মাইল পথ দৌড়াইতে উহাদের প্রত্যেকের কত সময় করিয়া লাগিবে?

23. দুই মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে B, A কে দুই মিনিটে হারাইল; দ্বিতীয় বারে, A এর গতি ঘণ্টায় দুই মাইল বেগে বাড়াইবার, এবং B এর গতি ঘণ্টায় দুই মাইল হিসাবে কমাইবার ফলে, A, B কে দুই মিনিটে হারাইল। A ও B এর প্রথম বারে দৌড়াইবার বেগ নির্ণয় কর।

24. লণ্ডন হইতে কেম্ব্রিজে যাইতে, পথিমধ্যে কোন দুর্ঘটনার জন্য একখানা রেল-গাড়ী উহার গতি-বেগ পূর্ব্ব বেগের $\frac{1}{n}$ অংশে পরিণত করিয়া, a ঘণ্টা বিলম্বে কেম্ব্রিজে পৌছিল। দুর্ঘটনার স্থান যদি কেম্ব্রিজ হইতে b মাইল নিকটতর হইত, তাহা হইলে গাড়ীখানি কেম্ব্রিজে c ঘণ্টা বিলম্বে পৌছিত। দুর্ঘটনার পূর্ব্বে গাড়ীখানি কত বেগে যাইতেছিল?

25. একখানা রেলগাড়ী, একঘণ্টা চলিবার পর কোন দুর্ঘটনায় পড়িয়া, তথায় একঘণ্টা বিলম্ব করিল এবং তৎপরে, পূর্ব্ব বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ বেগে চলিয়া 3 ঘণ্টা বিলম্বে গন্তব্য স্থানে পৌছিল। যদি দুর্ঘটনা, রওনা হওয়ার স্থান হইতে, আরও 50 মাইল দূরবর্ত্তী স্থানে হইত, তাহা হইলে গাড়ীখানি পূর্ব্বাপেক্ষা 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্ব্বে গন্তব্য স্থানে পৌছিতে পারিত। গাড়ীখানি মোট কত মাইল পথ চলিয়াছিল?

26. কোন সংখ্যার যুগ্ম-স্থানীয় (even places) অঙ্কসমূহের সমষ্টি এবং অযুগ্ম-স্থানীয় (odd places) অঙ্কসমূহের সমষ্টির অন্তরফল, 0 হইলে, বা 11 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটিও 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [B. C. S., 1923.]

27. কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটিও 3 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

অষ্টাবিংশ অধ্যায়

লেখাবলী ও উহাদের ব্যবহার

(Graphs and their Applications)

185. কোন বীজগণিতীয় রাশিকে কিরূপে বিন্দু ও রেখা দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহা সপ্তম ও উনবিংশ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

এক্ষণে, লৈখিক চিত্রের ব্যবহার দ্বারা কিরূপে সমীকরণ ও তৎসম্পর্কীয় প্রশ্নের সমাধান করা যায়, তাহাই আলোচনা করা যাইবে। বীজগণিতীয় পদ্ধতি অনুসারে যেরূপ সূক্ষ্ম ফল পাওয়া যায়, এই পদ্ধতিতে লব্ধ ফলগুলি, অবশ্য, সেরূপ সূক্ষ্ম না হইলেও, অত্যন্ত সহজসাধ্য বলিয়া, অনেকস্থলেই এই পদ্ধতি অনুসৃত হইয়া থাকে।

186. লৈখিক চিত্র সাহায্যে সমীকরণ-সমাধান :

উদা. 1. লেখ সাহায্যে সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} 2x - 7y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y &= 32 \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণ দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর।

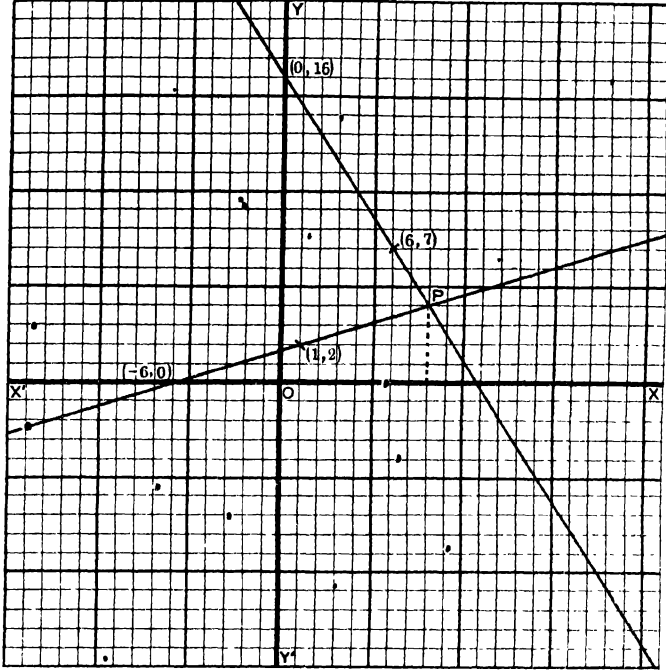
দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$\left.\begin{matrix} x = - \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}\right\}$ বিন্দু দুইটি প্রথম সমীকরণের লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

এবং $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 16 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x = 6 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}$ বিন্দু দুইটি দ্বিতীয় সমীকরণের লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

মনে কর, বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অঙ্কিত, সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র দুইটি পরবর্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল।

দেখা যাইতেছে যে, লৈখিক চিত্র দুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, যেহেতু, P বিন্দু উভয় লৈখিক চিত্রের উপরেই অবস্থিত, অতএব, উহার ভুজ-কোটি উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে। স্পষ্টতঃই, P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে 8 ও 4.

সুতরাং, $\left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}$ই সমীকরণদ্বয়ের নির্ণেয় বীজ

উপরোক্ত ফলের শুদ্ধিপরীক্ষা ঃ

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সকল পদগুলি সমতাচিহ্নের বামদিকে পক্ষান্তর করিয়া, এবং x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে 8 ও 4 বসাইয়া,

প্রথম সমীকরণে,

বাম পক্ষ $= 2x - 7y + 12 = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 12 = 0 =$ ডা'ন পক্ষ ;

এবং দ্বিতীয় সমীকরণে,

বাম পক্ষ $= 3x + 2y - 32 = 3 \times 8 + 2 \times 4 - 32 = 0 =$ ডা'ন পক্ষ।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $x = 8$, $y = 4$ হইলে, উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

উদা. 2. লেখ সাহায্যে সমাধান কর $\quad 2x + 12 \quad 32 - 3x$

এস্থলে আমাদিগকে, $\dfrac{2x+12}{7}$ এবং $\dfrac{32-3x}{2}$, এই র দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ (abscissa) নির্ণয় করিতে হইবে

এখন, $\frac{2x+12}{7}$ এর লেখ এবং $y=\frac{2x+12}{7}$ (অর্থাৎ, $2x-7y+12=0$) এর লেখ, উভয়ই এক।

আবার, $\frac{32-3x}{2}$ এর লেখ এবং $y=\frac{32-3x}{2}$ (অর্থাৎ, $3x+2y=32$) এর লেখ, উভয়ই এক।

এখন, $2x-7y+12=0$ এবং $3x+2y=32$, এই সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র দুইটি অঙ্কন করিয়া (প্রথম উদাহরণের চিত্র দেখ) দেখা যায় যে, উহাদের ছেদবিন্দুর (অর্থাৎ, P এর) ভুজ $=8$.

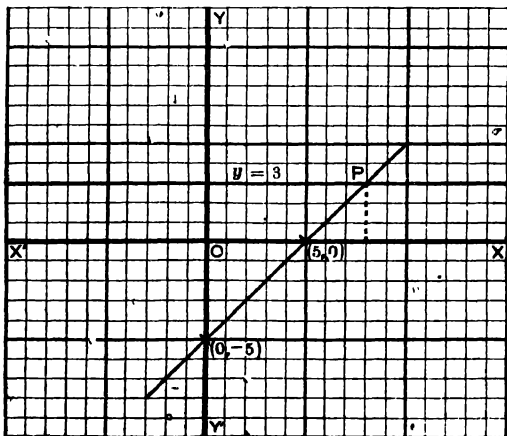
$\therefore\quad x=8$ ই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

উদা. 3. লেখ সাহায্যে সমাধান কর: $x-5=3$.

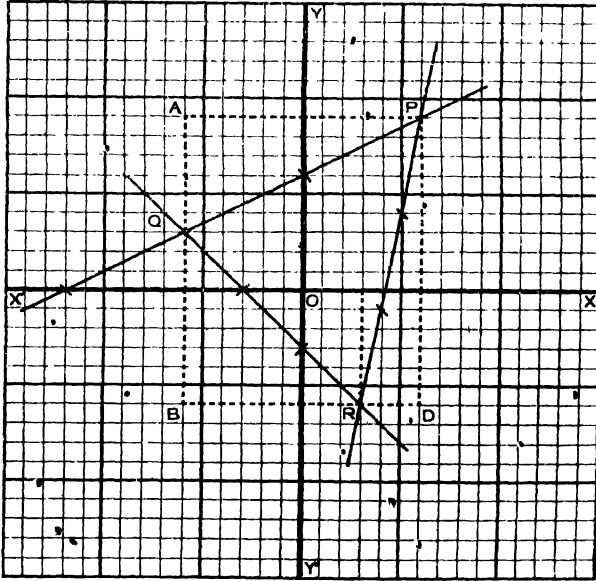
এক্ষেত্রে, $x-5$ এবং 3, এই রাশি দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, আমরা জানি যে, $x-5$ এর লেখ এবং $y=x-5$ এর লেখ, উভয়ই এক; এবং $y=x-5$ এর লৈখিক চিত্রের উপর

$$\left.\begin{array}{l} x=\ \ 0 \\ y=-5 \end{array}\right\}, \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=0 \end{array}\right\} \text{ বিন্দুদ্বয় অবস্থিত।}$$

আবার, 3 এর লেখ এবং $y=3$ এর লেখ, উভয়ই এক; এবং $y=3$ এর লৈখিক চিত্র, স্পষ্টতঃই, x-অক্ষরেখার সমান্তরাল, এবং মূলবিন্দু হইতে তিন 'একক' দূরবর্তী একটি সরলরেখা।

বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অঙ্কিত লৈখিক চিত্র দুইটি, পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল। লেখ দুইটির ছেদবিন্দু P দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টই দেখা যায় যে, P বিন্দুর ভুজ $=8$.

অতএব, $x=8$ ই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 4. $x-2y+12=0$, $x+y+3=0$ এবং $5x-y-21=0$, এই তিন সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$\left.\begin{matrix} x= & 0 \\ y= & 6 \end{matrix}\right\}$, এবং $\left.\begin{matrix} x= & -12 \\ y= & 0 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x-2y+12=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

$\left.\begin{matrix} x= & 0 \\ y= & -3 \end{matrix}\right\}$, এবং $\left.\begin{matrix} x= & -3 \\ y= & 0 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x+y+3=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

এবং $\left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = -1 \end{matrix}\right\}$, এবং $\left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $5x - y - 21 = 0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণত্রয়ের লেখ তিনটি, পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠার চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR এবং RP সরলরেখা দ্বারা সূচিত করা হইল।

চিত্র হইতে দেখা যায় যে,

শীর্ষ P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{matrix} x = 6 \\ y = 9 \end{matrix}\right\}$;

শীর্ষ Q এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{matrix} x = -6 \\ y = 3 \end{matrix}\right\}$;

এবং শীর্ষ R এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{matrix} x = 3 \\ y = -6 \end{matrix}\right\}$.

এখন, P, Q, R দিয়া অঙ্কিত, এবং অক্ষরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল কতিপয় রেখা টানিয়া (চিত্র দেখ) দেখা যায় যে,

$$\triangle PQR = \text{আয়ত } ABDP - \triangle QAP - \triangle QBR - \triangle RDP$$

$$= AB \times BD - \frac{AP \times AQ}{2} - \frac{QB \times BR}{2} - \frac{RD \times DP}{2}$$

$$= 15 \times 12 - \frac{12 \times 6}{2} - \frac{9 \times 9}{2} - \frac{3 \times 15}{2}$$

$$= 180 - 36 - \tfrac{81}{2} - \tfrac{45}{2} = 81 \text{ বর্গ একক।}$$

উদা. 5. $x + y - 10 = 0$, $x - y + 10 = 0$, $x + y + 10 = 0$ এবং $x - y - 10 = 0$ দ্বারা সূচিত সরলরেখাগুলিকে বাহুরূপে লইয়া অঙ্কিত চতুষ্কোণের শীর্ষবিন্দু চারিটির ভুজ-কোটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, চতুষ্কোণটি একটি বর্গক্ষেত্র; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেখা যায় যে,

$\left.\begin{matrix} x=10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ এবং $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=10 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x+y-10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=10 \end{matrix}\right\}$ এবং $\left.\begin{matrix} x=-10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x-y+10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-10 \end{matrix}\right\}$ এবং $\left.\begin{matrix} x=-10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x+y+10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

এবং $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-10 \end{matrix}\right\}$ এবং $\left.\begin{matrix} x=10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ বিন্দুদ্বয় $x-y-10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

এখন, বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে ''একক'রূপে লইয়া, লৈখিক চিত্রগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখা যায় যে, উহারা, উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR, RS এবং SP সরলরেখাগুলি দ্বারা সূচিত হইতেছে [চিত্র দেখ]।

স্পষ্টই, P, Q, R, S এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে,

$$\left.\begin{matrix}x=10\\y=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=10\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-10\\y=0\end{matrix}\right\},\text{ এবং }\left.\begin{matrix}x=0\\y=-10\end{matrix}\right\}.$$

চিত্র হইতে অতি সহজেই দেখা যায় যে, $OP=OQ=OR=OS$ (প্রত্যেকেই 10 'একক' দীর্ঘ বলিয়া), এবং PR কর্ণটি (diagonal টি) QS কর্ণের উপর লম্ব।

কাজেই, $PQRS$ চতুষ্কোণটি একটি বর্গক্ষেত্র।

উহার ক্ষেত্রফল $=\triangle PQR+\triangle PSR$

$$=\frac{PR\times OQ}{2}+\frac{PR\times OS}{2}$$

$$=\frac{20\times 10}{2}+\frac{20\times 10}{2}=200 \text{ বর্গ একক।}$$

প্রশ্নমালা 100

লৈখিক চিত্র সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $x+y=9,\quad 3x-2y=7.$

2. $4x+3y=13,\ 3x+2y=11.$

3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4,\quad 4x-5y=2.$

4. $y-x=2,\ 3x-2y=5.$

5. $5x-3y=11,\ 2y-3x+4=0.$

6. $\frac{x-2}{2}=\frac{-5x+4}{5}.$

7. $\frac{2x+7}{3}=\frac{3x-7}{2}.$

8. $\frac{4x-3}{5}=\frac{6x}{7}-1.$

9. $x-12=-3.$

10. $5x-13=7.$

11. $-x+3y=18$, $x+7y=22$ এবং $y+3x=26$ দ্বারা সূচিত সরলরেখা তিনটি কর্তৃক উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে, $4x-y=16$, $3x-2y=7$ এবং $x+y=9$ দ্বারা সূচিত সরল-রেখাত্রয় এক বিন্দু দিয়া যায়; উহাদের সম্পাতবিন্দুর (point of concurrence) ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

13. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের লৈখিক চিত্রদ্বারা উৎপন্ন চতুষ্কোণগুলির শীর্ষবিন্দু, এবং উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর :

(i) $x+y=3$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$, $\frac{x+y}{3}=-1$ এবং $x-y+3=0$;

(ii) $x=1$, $y=5$, $x=12$ এবং $y=10$;

(iii) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$.

14. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুর ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর :

(i) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$;

(ii) $x-2=0$, $y-1=0$, $x+y=6$;

(iii) $x-2y+8=0$, $x+y+2=0$, $5x-y-14=0$.

নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সাধারণ (common) বীজ নির্ণয় করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের প্রত্যেকে x এবং y এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। x এবং y এর এই সাধারণ মানগুলি নির্ণয় কর এবং লেখ-সাহায্যে উহাদিগকে পরীক্ষা কর :

15. $x+y=2$, $x=1$, $y=1$.

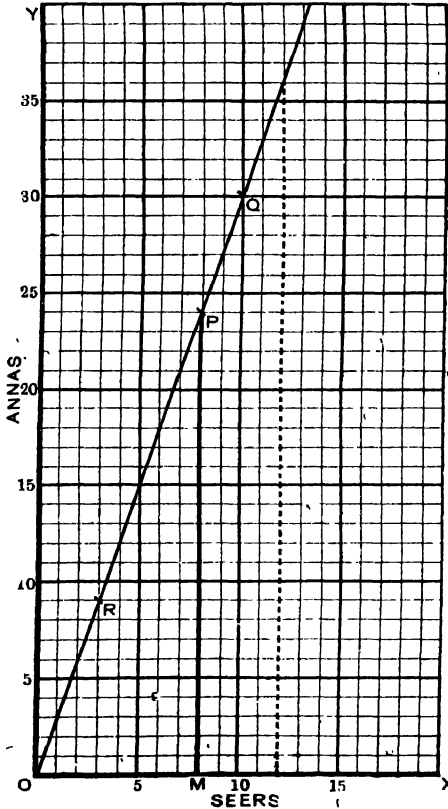
16. $7x+5y=24$, $x+y=2$, $2x+y=9$.

17. $2x-y=7$, $y-x=2$, $11x=9y$.

187. সমীকরণ সম্বন্ধীয় প্রশ্ন-সমাধানে লৈখিক চিত্রের ব্যবহার :

উদা. 1. এক সের চাউলের মূল্য তিন আনা হইলে, দেখাও যে, বর্গাঙ্কিত কাগজে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় যে, উহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ (abscissa) যে পরিমাণ চাউল নির্দ্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি (ordinate) সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিবে।

উপরোক্ত সরলরেখার সাহায্যে, (i) 12 সের চাউলের মূল্য, (ii) 27 আনা মূল্যের চাউলের ওজন, নির্ণয় কর।

নিম্নপ্রদর্শিত চিত্রে, ধর, OX অক্ষরেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক সের', এবং OY অক্ষরেখাস্থিত এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক আনা' নির্দ্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বে লিখিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

যেহেতু, এক সেরের মূল্য তিন আনা, অতএব, 8 সেরের মূল্য 24 আনা হইবে। কাজেই, P, এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ OM, যে পরিমাণ (অর্থাৎ, 8 সের) চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি PM, সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য (অর্থাৎ, 24 আনা) নির্দ্দেশ করিতেছে।

OP সরলরেখাটি সংযুক্ত কর এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, OP সরলরেখাই এরূপ একটি রেখা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই, P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

অতএব, ইহার উপরিস্থিত $Q(10, 30)$ বিন্দুটি এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যে পরিমাণ চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিতেছে। $R(3, 9)$ বিন্দুর ভুজ-কোটিও অনুরূপভাবে সম্বদ্ধ। ইত্যাদি।

সুতরাং, OP ই নির্ণেয় সরলরেখা।

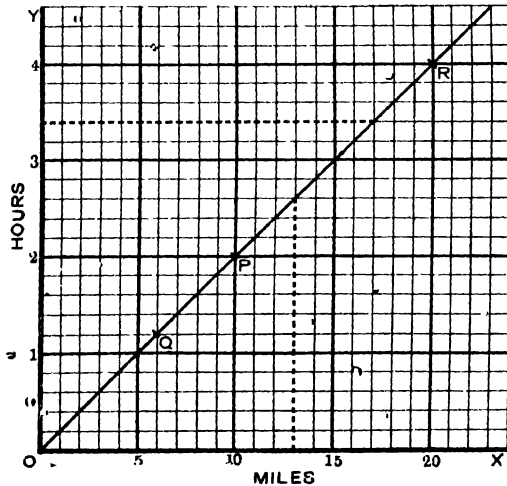
এই সরলরেখার সাহায্যে, যে কোন পরিমাণ চাউলের মূল্য অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যে বিন্দুর ভুজ 12, সেই বিন্দুর কোটি স্পষ্টতঃই 36 ; অতএব, 12 সের চাউলের মূল্য 36 আনা। অন্যান্য ক্ষেত্রেও অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে।

উপরিপ্রদর্শিত চিত্র (অর্থাৎ OP সরলরেখা) হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট মূল্যে কত পরিমাণ চাউল পাওয়া যাইবে, তাহাও অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যে

বিন্দুর কোটি 27, তাহার ভুজ স্পষ্টতঃই 9 ; অতএব, 27 আনা মূল্যে 9 সের চাউল পাওয়া যাইবে।

টীকা। OP সরলরেখাকে চাউলের **মূল্য-নিরূপক লেখ (price-graph)** বলে।

উদা. 2. B নামক এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে কোন এক নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে যাত্রা করিল। দেখাও যে, B এর গতি-নির্দ্দেশক লৈখিক চিত্র এরূপ একটি সরলরেখা দ্বারা সূচিত হইতে পারে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ যত সংখ্যক মাইল নির্দ্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর যে সময় আবশ্যক হয়, তাহা নির্দ্দেশ করিবে।

এই লেখ হইতে, (i) 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে B যত মাইল অতিক্রম করিবে, তাহা, এবং (ii) 13 মাইল যাইতে, B এর যত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় কর।

ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক মাইল', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য '12 মিনিট' সময় সূচিত করিতেছে ; এবং এতদনুসারে উপরিপ্রদর্শিত লৈখিক চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

যেহেতু, B এক ঘণ্টায় 5 মাইল পথ অতিক্রম করে, অতএব সে দুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ অতিক্রম করিবে। কাজেই, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, P এরূপ একটি বিন্দু,

যাহার ভুজ যত মাইল (এস্থলে, 10 মাইল) সূচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর যত সময় (এস্থলে, 2 ঘণ্টা) লাগে, তাহা সূচিত করিতেছে।

OP সরলরেখাটি অঙ্কিত কর এবং উহাকে উভয়দিকে বৰ্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, OP ই এরূপ একটি সরলরেখা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

এই সরলরেখার উপর অন্য একটি বিন্দু, Q, লইয়া দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ, 6 মাইল, এবং কোটি 1 ঘণ্টা 12 মিনিট সময় নির্দ্দেশ করিতেছে ; কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 1 ঘণ্টা 12 মিনিটে 6 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারে। কাজেই, Q বিন্দুটিও উপরিলিখিত সর্ত্তগুলি পূরণ করিতেছে।

তদ্রূপ, এই সরলরেখার উপর আর একটি বিন্দু, R, লইয়া দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ 20 মাইল, এবং কোটি, 4 ঘণ্টা সময়, নির্দ্দেশ করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 4 ঘণ্টায় 20 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়া থাকে। অতএব, R বিন্দুটিও উপরিলিখিত সর্ত্তগুলি পূরণ করিতেছে।

ঐ রেখার উপরিস্থিত অন্যান্য বিন্দুর বেলায়ও অনুরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।

কাজেই, OP সরলরেখাই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

এই লেখ হইতে, B কোন্ নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ দূরত্ব কত সময়ে অতিক্রম করিবে, তাহা অবিলম্বে জানা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি কোন বিন্দুর ভুজ 13 মাইল দূরত্ব সূচিত করে, তাহা হইলে, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, ঐ বিন্দুর কোটি 2 ঘণ্টা 36 মিনিট সময় নির্দ্দেশ করিতেছে ; অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 2 ঘণ্টা 36 মিনিটে 13 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে।

আবার, B, কোন্ নির্দ্দিষ্ট সময়ে কত মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিবে, তাহাও এই লেখ হইতে নির্ণীত হইতে পারে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি ঐ লেখস্থিত কোন বিন্দুর কোটি 3 ঘণ্টা 24 মিনিট সময় সূচিত করে, তবে স্পষ্টই ঐ বিন্দুর ভুজ 17 মাইল দূরত্ব সূচিত করিবে। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে 17 মাইল পথ অতিক্রম করিবে।

টীকা। OP সরলরেখাটিকে B এর **'গতি-নিরূপক লেখ' (motion graph)** বলে।

উদা. 3. যদি এক ইঞ্চির দৈর্ঘ্য 2·5 সেন্টিমিটারের দৈর্ঘ্যের সমান হয়, তবে দেখাও যে, এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ যত সংখ্যক 'ইঞ্চি' সূচিত করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি উহার সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সেন্টিমিটারের সংখ্যা নির্দ্দেশ করিবে।

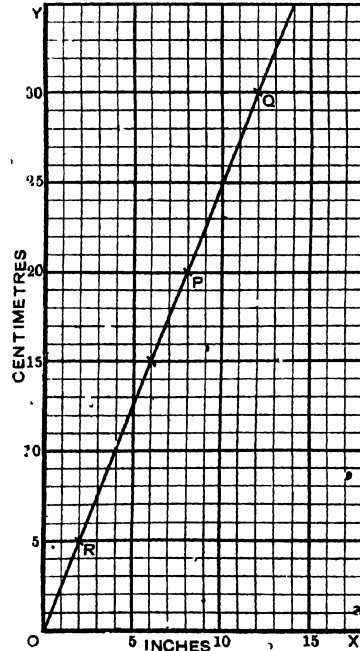
এই চিত্র (বা, সরলরেখা) হইতে, (i) 10 ইঞ্চিতে কত সেন্টিমিটার, এবং (ii) 15 সেন্টিমিটারে কত ইঞ্চি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুব দৈর্ঘ্য 'এক ইঞ্চি', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক সেন্টিমিটার (সে. মি.)' স্থচিত করিতেছে; এবং এতদনুসারে, নিম্নপ্রদর্শিত চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

যেহেতু, 1 ইঞ্চি = 2·5 সেন্টিমিটার, অতএব, 8 ইঞ্চি = 20 সেন্টিমিটার। সুতরাং, উপরিস্থিত চিত্রে, P এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যত ইঞ্চি দৈর্ঘ্য স্থচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি উক্ত দৈর্ঘ্যের ভিতর যত সেন্টিমিটার আছে, তাহার সংখ্যা নির্দ্দেশ করিতেছে।

একটি সরলরেখা দ্বারা O, P যুক্ত কর, এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, উহা এরূপ এক সরলরেখা হইবে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

এই সরলরেখার উপর অন্য এক বিন্দু Q লইয়া দেখা যায় যে, উহার ভুজ 12 ইঞ্চি, এবং উহার কোটি 30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্য স্থচিত করিতেছে। কিন্তু, আমরা জানি যে, 12 ইঞ্চি = 30 সে. মি.; কাজেই, Q বিন্দুও উপরিলিখিত সর্ত্ত পূরণ করিতেছে।

এই সরলরেখার উপর, অপর আর এক বিন্দু R লও; দেখা যায় যে, ইহার ভুজ 2 ইঞ্চি, এবং কোটি 5 সেন্টিমিটার স্থচিত করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, 2 ইঞ্চি = 5 সে. মি.; অতএব, R বিন্দুও উপরোক্ত সর্ত্ত পূরণ করিতেছে।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুই উপরোক্ত সর্ত্ত পূরণ করিবে। অতএব, OP ই নির্ণেয় সরলরেখা।

উক্ত লেখ (অর্থাৎ, OP সরলরেখা) হইতে আমরা, কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক ইঞ্চি কত সেন্টিমিটারের সমান, তাহা অবিলম্বে নির্ণয় করিতে পারি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, যে বিন্দুর ভুজ 10 ইঞ্চি নির্দ্দেশ করে, তাহার কোটি 25 সেন্টিমিটার নির্দ্দেশ করে ; কাজেই, বুঝা যাইতেছে যে, 10 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 25 সে. মি. দৈর্ঘ্যের সমান।

আবার, উক্ত লেখ হইতে আমরা, যে কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক সেন্টিমিটারের দৈর্ঘ্য কত ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান, তাহাও নির্ণয় করিতে পারি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি 15 সে. মি. সূচিত করে, সেই বিন্দুর ভুজ, স্পষ্টই, 6 ইঞ্চি সূচিত করে। কাজেই, বুঝা যায় যে, 15 সে. মি. দৈর্ঘ্য, 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান।

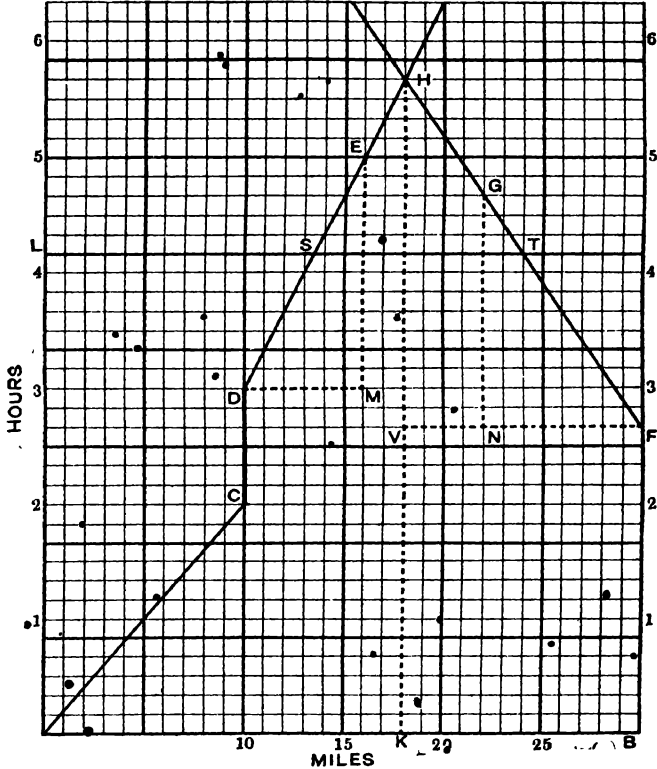
টীকা। OP সরলরেখা হইতে, কত ইঞ্চি কত সেন্টিমিটারের সমান, বা কত সেন্টিমিটার কত ইঞ্চির সমান, ইহা জানা যায় বলিয়া, উক্ত সরলরেখাকে **'ইঞ্চি-সেণ্টিমিটার' পরিবর্ত্তক লেখ** (**inch-centimetre conversion graph**) বলা হয়।

উদা. 4. A ও B পরস্পর 30 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিয়া, দুই ঘণ্টা পরে পথিমধ্যে এক ঘণ্টাকাল বিশ্রাম করিল এবং বাকী পথ ঘণ্টায় তিন মাইল গতিতে যাইবে বলিয়া পুনরায় রওনা হইল। P, A হইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল। P এবং Q, কখন্ এবং কোথায়, একত্রিত হইবে ?

ধর, OX অক্ষরেখার সমান্তর AB রেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক মাইল' দূরত্ব, এবং OY অক্ষরেখার সমান্তর BF রেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য '10 মিনিট' সময় নির্দ্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত চিত্রের AB এবং BF রেখাদ্বয়ের পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

(i) P, A হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, দুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ গমন করিল। অতএব, C যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 10 মাইল এবং 2 ঘণ্টা নির্দ্দেশ করে, তাহা হইলে, AC সরলরেখাই P এর প্রথম দুই ঘণ্টার গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টায়, P এর গতি-নিরূপক লেখ এইরূপ হইবে যে, উহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজই সর্ব্বদা 10 মাইল নির্দ্দেশ করিবে ; কারণ, এই ঘণ্টায় P স্থির হইয়া বিশ্রাম করিতেছিল ; কাজেই, উল্লিখিত চিত্রে, CD সরলরেখাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার গতি-নিরূপক (অথবা, P এর বিশ্রামের) লেখ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টার পর, P, ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব চিত্রে, DM, 6 মাইল পথ, এবং ME, 2 ঘণ্টা সময়, নির্দ্দেশ করিলে, DE সরলরেখাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার পরবর্ত্তী সময়ের গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

সুতরাং, $ACDE$, এই ভগ্ন-সরলরেখাই P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেখ' হইবে।

(ii) P, A হইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হইতে রওনা হইল। কাজেই, চিত্রে, BF সরলরেখাকে Q এর B তে 2 ঘণ্টা 40 মিনিট কালব্যাপী বিশ্রামের লেখ বলিয়া কল্পনা করা যায়।

তৎপরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব, চিত্রে, G যদি এরূপ একটি বিন্দু হয় যে, FN ও NG রেখাদ্বয় যথাক্রমে 8 মাইল পথ ও 2 ঘণ্টা সময় নির্দ্দেশ করে, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, FG সরলরেখাই Q এর গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

(iii) ধর, এই দুইটি লেখ (অর্থাৎ, P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেখ' এবং Q এর গতি-নিরূপক লেখ) H বিন্দুতে ছেদ করিল। H হইতে AB এর উপর HK লম্বটি অঙ্কিত কর, এবং FN কে বর্দ্ধিত করিয়া HK রেখার সহিত V বিন্দুতে মিলিত কর।

অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, HK দ্বারা নির্দ্দিষ্ট সময়ে, P, B অভিমুখে AK দ্বারা সূচিত দূরত্ব, এবং Q, A অভিমুখে BK (অর্থাৎ, FV) দ্বারা সূচিত দূরত্ব, অতিক্রম করিয়াছে ; এবং কাজেই, তাহারা এই সময়ে মিলিত হইয়াছে।

সুতরাং, তাহাদের সাক্ষাতের নির্ণেয় সময় $= HK$ দ্বারা নির্দ্দিষ্ট সময় $= P$ এর রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে ;

এবং A হইতে সাক্ষাতের স্থানের দূরত্ব $= AK$ দ্বারা নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব $=18$ মাইল।

টীকা 1. যেহেতু, HV রেখা 3 ঘণ্টা সময় সূচিত করিতেছে, অতএব, B হইতে Q এর রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে, P এবং Q মিলিত হইয়াছে।

টীকা 2. L বিন্দু দিয়া অঙ্কিত OX রেখার সমান্তরাল রেখাটি লেখ দুইটিকে S ও T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে (চিত্র দেখ)। যেহেতু, AL, 4 ঘণ্টা 10 মিনিট সময়, এবং ST, $10\frac{1}{2}$ মাইল দূরত্ব সূচিত করিতেছে, অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, P এর রওনা হওয়ার পর 4 ঘণ্টা 10 মিনিটের সময়, P ও Q এর মধ্যে $10\frac{1}{2}$ মাইল ব্যবধান রহিয়াছে।

প্রশ্নমালা 101

1. দুগ্ধের মূল্য সের প্রতি পাঁচ আনা করিয়া লইলে 5 সের পর্য্যন্ত দুগ্ধের মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর। চিত্র হইতে 3 সের 5 ছটাক দুগ্ধের মূল্য, এবং দশ আনা নয় পাইতে কত পরিমাণ দুগ্ধ পাওয়া যায়, তাহা নিরূপণ কর।

2. ফজ্‌লি আমের মূল্য ডজন প্রতি এক টাকা দুই আনা হইলে, 30টি পর্য্যন্ত আমের মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 17টি আমের মূল্য, এবং 1 টাকা 12 আনা 6 পাইতে কত আম পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।

3. কোন ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাঁহার 'গতি-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 13 মাইল যাইতে তাঁহার কত সময় লাগিবে, এবং $4\frac{3}{4}$ ঘণ্টায় তিনি কত মাইল গমন করিবেন, তাহা নির্ণয় কর।

4. 'এক হাত', দেড় ফুটের সমান হইলে, একটি 'হাত-ফুট পরিবর্ত্তক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, $5\frac{3}{4}$ হাতে কত ফুট, এবং $6\frac{3}{4}$ ফুটে কত হাত, তাহা নির্ণয় কর।

5. A, কোন নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে এক নির্দ্দিষ্ট দিকে, ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে যাত্রা করিল; এবং B, A এর এক ঘণ্টা পরে ঐ স্থান হইতে ঐ দিকেই, ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিল। A এবং B এর 'গতি-নিরূপক লেখ' দুইটি অঙ্কিত কর, এবং উহা হইতে, B, A কে, কোথায় এবং কোন্ সময়ে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর।

6. A এবং B, 20 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে, এবং Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 2 মাইল গতিতে, একই সময়ে যাত্রা করিল। P এবং Q এর 'গতি-নিরূপক লেখ' দুইটি অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে মিলিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

7. পঞ্চাশটি একই জাতীয় বস্তুর মূল্য 3 টাকা 2 আনা হইলে, 50টি পর্য্যন্ত বস্তুর মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর। উহা হইতে, 19টি বস্তুর মূল্য এবং 2 টাকা 7 আনায় কতটি বস্তু পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।

8. 1 কিলোগ্রাম $= 2 \cdot 2$ পাউণ্ড্ হইলে, এরূপ একটি 'কিলোগ্রাম-পাউণ্ড্ পরিবর্ত্তক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর, যাহা হইতে 15 পাউণ্ড্ পর্য্যন্ত ওজনের তুল্য ওজনবিশিষ্ট কিলোগ্রামের সংখ্যাও নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 11 পাউণ্ড্ কত কিলোগ্রামের সমান, তাহা নির্ণয় কর।

9. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে তিন ঘণ্টা কাল ভ্রমণ করিবার পর, দেড় ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া পুনরায় ঘণ্টায় আড়াই মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তাঁহার ভ্রমণের 'গতি-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর।

10. এক ব্যক্তি, B হইতে C অভিমুখে, ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তিন ঘণ্টা পরে, তিনি তাঁহার মত পরিবর্ত্তন করিয়া পুনরায় B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে প্রত্যাবর্ত্তন করিতে লাগিলেন। এইরূপভাবে দুই ঘণ্টা কাল চলিবার পর, পুনরায় তাঁহার মত পরিবর্ত্তিত হইল; এবং তিনি C অভিমুখে, ঘণ্টায় 7 মাইল বেগে দৌড়াইতে লাগিলেন। তাঁহার গতি-নিরূপক একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর।

11. কোন এক রাস্তার উপর A, B এবং C পর পর তিনটি ষ্টেশন, এবং A হইতে B এর দূরত্ব 6 মাইল। Q, ঠিক মধ্যাহ্নে, B হইতে C অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে লাগিল; এবং P, অপরাহ্ণ দেড়টার সময়, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় $6\frac{1}{2}$ মাইল বেগে দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। উহাদের গতির লৈখিক চিত্র দুইটি অঙ্কিত কর; এবং ঐ চিত্র হইতে, P, কখন এবং কোন্ স্থানে Q কে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর।

12. কোন ব্যক্তি 40 দিনে 60 টাকা ব্যয় করেন। এরূপ একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্দারা, যে কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক দিনে তিনি কত পরিমাণ টাকা ব্যয় করেন, তাহা নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 28 দিনে তিনি কত ব্যয় করিবেন, তাহা নির্ণয় কর।

13. বেলা 3 টা ও 4 টার মধ্যে, কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে, তাহা, লৈখিক চিত্র সাহায্যে, নির্ণয় কর।

14. টাকা প্রতি 5 পাই করিয়া আয়-কর (income-tax) ধার্য্য আছে। এরূপ একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্দ্বারা 3000 হইতে 5000 পর্য্যন্ত টাকার আয়-কর নির্ণয় করা যায়। এই চিত্র হইতে, কত পরিমাণ আয়ের আয়-কর 85 টাকা, এবং 4350 টাকা আয় হইলে, কত আয়-কর দিতে হইবে, তাহা নিরূপণ কর।

15. কলিকাতা হইতে রাণাঘাটগামী একখানি 'এক্স্‌প্রেস রেলগাড়ী' (express train) এবং নৈহাটি হইতে কলিকাতাগামী অন্য একখানি স্থানীয় (local) রেলগাড়ীর বিভিন্ন ষ্টেশনে আগম ও নির্গমের সময় নিম্নে প্রদত্ত হইল। রেলগাড়ী দুইখানির প্রত্যেকটি বরাবর সমবেগে চলিতে থাকিলে, এবং স্থানীয় গাড়ীখানি (local train), নৈহাটি হইতে কলিকাতার মধ্যবর্ত্তী প্রত্যেক ষ্টেশনে এক মিনিট করিয়া থামিলে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে, পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

কলিকাতা হইতে মাইলে নিরূপিত দূরত্ব :		ছাড়িবার সময় :	
46	রাণাঘাট		17-56
24	নৈহাটি	16-24	
22	কাকিনাড়া	16-29	
19	শ্যামনগর	16-36	
17	ইছাপুর	16-42	↑
15	পল্‌তা	16-45	
14	ব্যারাকপুর	16-49	
13	টিটাগড়	16-53	
12	খড়দহ	16-57 ↓	
10	সোদপুর	17-2	
9	আগরপাড়া	17-6	
8	বেলঘরিয়া	17-11	
5	দমদম	17-19	
	কলিকাতা	17-31	16-42

[B. C. S. পরীক্ষা, 1922.]

ঊনত্রিংশ অধ্যায়

সূচক-নিয়মাবলী (Laws of Indices)

188. সংজ্ঞা ঃ m-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটিই a হইলে, ঐ উৎপাদকগুলির গুণফলকে a^m দ্বারা সূচিত করা হয়। [নিয়ম 16]

অতএব, m একটি অখণ্ড ধনরাশি (a positive integer) হইলে, a^m এর অর্থ নিরূপণ করা অত্যন্ত সহজ।

189. সূচক-নিয়ম ও তদবলম্বনে নির্ণীত সিদ্ধান্ত-সমূহ ঃ m ও n যে কোন দুইটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

যেহেতু, $a^m = a.a.a.................m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত,

এবং, $a^n = a.a.a.a...............n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত,

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a.a.a.........m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$\times (a.a.a.a.........n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত),

$= a.a.a.a.a.a.a.a.....(m+n)$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{m+n}.$

ইহাকেই **সূচক-নিয়ম (Index Law)** বলে।

অনুসি. 1. m, n এবং p এর প্রত্যেকে যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}.$$

কারণ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\therefore$ $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p}$.

এইরূপে; $a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+q+\cdots\cdots}$

অতএব দেখা যায় যে, কোন সংখ্যার কতকগুলি বিভিন্ন শক্তির গুণফল, ঐ সংখ্যার এরূপ এক শক্তি, যাহার সূচক প্রদত্ত শক্তিগুলির সূচকের সমষ্টির সমান।

অনুসি. 2. m ও n যে কোন দুইটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ হইবে।}$$

কারণ, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times ......n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{m+m+m+......}$ n-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত [অনুসি. 1]

$\therefore \quad = a^{mn}.$

অনুসি. 3. m ও n যে কোন দুইটি অখণ্ড ধনরাশি এবং $m > n$ হইলে,

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ হইবে।}$$

কারণ, $a^{m-n} \times a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, [কারণ, $m-n$ একটি অখণ্ড ধনরাশি]

$$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

190. m ও n এর যে কোন প্রকার মানের জন্যই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ সত্য হইবে বলিয়া ধরিয়া লইয়া, কোন সংখ্যার ভগ্নাংশ ও ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট শক্তিগুলির অর্থ নির্ণয় :

(i) p ও q যে কোন দুই অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $a^{\frac{p}{q}}$ এর অর্থ নির্ণয় কর :

যেহেতু, m ও n এর যে কোন মানের জন্যই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হইবে, অতএব,

m ও n এর প্রত্যেকের পরিবর্তে $\frac{p}{q}$, বসাইয়া,

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}};$$

তদ্রূপ, $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}}$; ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times .$ q-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$;

অথবা, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$.

কাজেই, $a^{\frac{p}{q}}$, a^p এর q-তম মূল (q^{th} root) সূচিত **করিতেছে ;**

সুতরাং, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

অনুসি. । উপরোক্ত ব্যাখ্যা হইতে, স্পষ্টই, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$; ইত্যাদি।

সাধারণভাবে প্রকাশ করিলে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

টীকা । সূচক-নিয়মানুসারে, সহজেই বুঝা যায় যে,

$$a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \ldots\ldots p\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত} = a^{\frac{p}{q}}.$$

কাজেই, $a^{\frac{p}{q}}$ কে $a^{\frac{1}{q}}$ এর p-তম শক্তি, অর্থাৎ $(\sqrt[q]{a})^p$ বলিয়াও মনে করা যায়।

সুতরাং, $a^{\frac{p}{q}}$ কে 'a এর p-তম শক্তির q-তম মূল,' অথবা 'a এর q-তম মূলের p-তম শক্তি,' এতদুভয়ের যে কোন রূপেই ব্যাখ্যা করা যায়।

(ii) a^0 এর অর্থ নির্ণয় করা :

যেহেতু, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্যই $a^m \times a^n = a^{m+n}$,
অতএব, m এর পরিবর্তে 0 বসাইয়া,

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n ; \quad \therefore \quad a^0 = a^n \div a^n = 1.$$

অতএব, যে কোন সংখ্যাকে 0 শক্তিতে উন্নীত করিলে, উহার মান 1 (unity) হইবে।

(iii) n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, a^{-n} এর অর্থ নির্ণয় করা :

যেহেতু, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্যই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হইবে,
অতএব, m এর পরিবর্তে $-n$ বসাইয়া,

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 ;$$

$$\therefore \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{এবং} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

অনুসি.। অতএব, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্যই $a^m \div a^n = a^{m-n}$ হইবে।

কারণ, $$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

উদা. 1. $8^{\frac{5}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

উদা. 2. $4^{-\frac{5}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt{4})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

উদা. 3. গুণ কর :

$$\sqrt{a^5}, \; a^{\frac{3}{4}}, \; \sqrt[4]{a^{-5}} \text{ এবং } \frac{1}{a^{-3}}.$$

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}} \times a^3$$
$$= a^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+3}$$
$$= a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+3} = a^{2+3} = a^5.$$

প্রশ্নমালা 102

ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট আকার বর্জ্জন করিয়া, নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর :

1. $a^{\frac{5}{7}}$. 2. $x^{-\frac{3}{2}}$. 3. $\dfrac{3}{x^{-\frac{4}{5}}}$. 4. $x^{-\frac{2}{5}} \times 3a^{-\frac{1}{2}}$.

5. $8m^{-2} \times m^{-\frac{2}{3}}$. 6. $x^{-\frac{4}{5}} + 3a^{-\frac{5}{4}}$. 7. $x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$.

8. $\sqrt[5]{x^2} \div \sqrt[5]{x^{-a}}$. 9. $\sqrt[2m]{a^{-5}} \times \sqrt[m]{a^8}$. 10. $\sqrt[4a]{x^6} + \sqrt[2a]{x^{-5}}$.

মূলচিহ্ন, বা ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট আকার বর্জ্জন করিয়া, নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর :

11. $(\sqrt[3]{x})^7$. 12. $(\sqrt[4]{a})^{-6}$. 13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$.

14. $\dfrac{1}{(\sqrt[5]{a})^{-2}}$. 15. $\sqrt[3]{x^4} \div (\sqrt[6]{x})^{-1}$. 16. $\sqrt[4]{a^{-3}} \div (\sqrt[8]{a})^{-12}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

17. $4^{-\frac{3}{2}}$. 18. $8^{\frac{2}{3}}$. 19. $9^{\frac{3}{2}}$. 20. $16^{\frac{5}{4}}$.

21. $81^{-\frac{3}{4}}$. 22. $\dfrac{1}{6^{-2}}$. 23. $(125)^{-\frac{2}{3}}$. 24. $(\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$.

25. $(\frac{1}{216})^{-\frac{2}{3}}$. 26. সরল কর : $\dfrac{x^{m+2n}x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1874.]

191. প্রমাণ করিতে হইবে যে, m এবং n এর যে কোন মানের জন্যই, $(a^m)^n = a^{mn}$ হইবে।

(i) ধর, n একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে, m যে কোন রাশিই হউক না কেন, সকল ক্ষেত্রেই

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}$$
$$= a^{m+m+m+\ldots\ldots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}}$$
$$= a^{mn}.$$

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $\frac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p ও q এর প্রত্যেকটি একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^m\right)^p}$$ [নিয়ম 190, (i)]

$$= \sqrt[q]{a^{mp}}$$ [(i) হইতে]

$$= a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}.$$ [নিয়ম 190, (i)]

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা $-p$ এর সমান ; এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p}$$ [নিয়ম 190, (iii)]

$$= \frac{1}{a^{mp}}$$ [(i) এবং (ii) হইতে]

$$= a^{-mp}$$ [নিয়ম 190, (iii)]

$$= a^{m(-p)} = a^{mn}.$$

সুতরাং, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

192. n যে কোন রাশিই হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a^n b^n = (ab)^n$.

(i) ধর, n একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে,

$a^n b^n = (a.a.a. \ldots\ldots\ldots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$\times (b.b.b. \ldots\ldots\ldots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$= (ab.ab.ab. \ldots\ldots\ldots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$= (ab)^n.$

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $\frac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p ও q এর প্রত্যেকে একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে, $a^n b^n$ এর পরিবর্ত্তে x বসাইয়া,

$$x = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} \; ; \; \therefore \; x^q = \left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \times \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$ [(i) হইতে]

$$= a^p \times b^p$$ [নিয়ম 189]

$$= (ab)^p \; ;$$ [(i) হইতে]

$$\therefore \; x = (ab)^{\frac{p}{q}} \; ;$$ সুতরাং $a^n b^n = (ab)^n$.

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা $-p$ এর সমান, এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$a^n b^n = a^{-p} b^{-p}$$

$$= \frac{1}{a^p b^p} \quad \text{[নিয়ম 190, (iii)]}$$

$$= \frac{1}{(ab)^p} \quad \text{[(i) এবং (ii) হইতে]}$$

$$= (ab)^{-p} \quad \text{[নিয়ম 190, (iii)]}$$

$$= (ab)^n.$$

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি. 1. $\dfrac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} = a^n \left(b^{-1}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n.$

অনুসি. 2. $a^n b^n c^n = (ab)^n c^n = (abc)^n$;

সাধারণভাবে, $a^n b^n c^n d^n \cdots\cdots = (abcd \cdots\cdots)^n.$

193. পূর্ববর্ত্তী নিয়ম দুইটিতে প্রতিপন্ন প্রতিজ্ঞা-দ্বয়ের প্রয়োগ :

উদা. 1. সরল কর : $\left(a^8 b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

$$\left(a^8 b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(a^8\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= a^{8 \times \left(-\frac{3}{4}\right)} \times b^{\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = a^{-6} b^{-\frac{5}{4}}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt[3]{ab^{-3}}$.

$$\sqrt{a^{-2}b} = (a^{-2}b)^{\frac{1}{2}} = (a^{-2})^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = a^{-1} b^{\frac{1}{2}} ;$$

এবং $\sqrt[3]{ab^{-3}} = (ab^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (b^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} b^{-1}.$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= a^{-1} b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} b^{-1}$

$$= a^{-1+\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{2}-1} = a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{2}}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\sqrt{a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}} \div \sqrt[3]{a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}}$.

$$\sqrt{a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}} = \left(a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^3)^{\frac{1}{2}} (b^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (c^{-\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}};$$

এবং, $\sqrt[3]{a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}} = \left(a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= (a^4)^{\frac{1}{3}} (b^{-1})^{\frac{1}{3}} (c^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{\frac{5}{12}}.$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}} \div a^{\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{\frac{5}{12}}$

$$= a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}} \times a^{-\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{6}} b^0 c^{-1} = a^{\frac{1}{6}} c^{-1}.$$

প্রশ্নমালা 103

সরল কর :

1. $(a^{-\frac{3}{4}})^8$.
2. $(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{6}})^{\frac{3}{4}}$.
3. $(d^{-\frac{1}{2}} b^{-3})^{-2}$.
4. $(a^6 b^{\frac{5}{4}})^{-\frac{4}{3}}$.
5. $(\sqrt[3]{a^4 b^3})^6$.
6. $(\sqrt[6]{x^9 y^{-8}})^{-3}$.
7. $\sqrt[8]{x^2} \div \sqrt[4]{x^{-3}}$.
8. $\sqrt{a^{-3} b^4} \times \sqrt[4]{a^2 b^{-8}}$.
9. $\sqrt[4]{x^{-2} \sqrt{y^5}} \times \sqrt{x \sqrt[4]{y^3}}$.
10. $(8x^3 \div 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}$.
11. $(64x^3 \div 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$.
12. $\sqrt[3]{a^6 b^{-2} c^{-4}} \times \sqrt[4]{a^{-6} b^4 c^8}$.
13. $\sqrt{a^{-\frac{2}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{3}}} \div \sqrt[3]{a^2 b^4 c^{-1}}$.
14. $\sqrt{ab^{-2}c^3} \div (\sqrt[3]{a^3 b^2 c^{-3}})^{-1}$.
15. $\left(\dfrac{a^{-1}b^2}{a^2 b^{-4}}\right)^7 \div \left(\dfrac{a^3 b^{-5}}{a^{-2} b^3}\right)^{-5}$.

194. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $a+b+c+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য ও ভাজকের প্রত্যেককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাউক :

$$a^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)\Big)\, a+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c)\,\Big(\, a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$a+a^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c)$$

$$a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c)$$

$$a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c)$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}$.

টীকা। গুণনে কিম্বা ভাগে, এতৎসংশ্লিষ্ট রাশিগুলির প্রত্যেককে উহাদের অন্তর্গত যে কোন **একই** অক্ষরের ঊর্দ্ধক্রমিক বা অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া, প্রক্রিয়া আরম্ভ করার পদ্ধতি উপেক্ষার বিষয় নহে। এই প্রকারে সাজান, প্রত্যেক ক্ষেত্রে অপরিহার্য্য না হইলেও, এইরূপ করিলে প্রক্রিয়াটি পরিচ্ছন্নভাবে সম্পন্ন করা যায়।

উদা. 2. $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$x^{\frac{1}{3}}$ এর পরিবর্তে a, $y^{\frac{1}{6}}$ এর পরিবর্তে b এবং $z^{\frac{1}{9}}$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া,

$$x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^2+\left(z^{\frac{1}{9}}\right)^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right).$$

সুতরাং, নির্ণেয় ভাগফল $=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}$

$$=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)+\left(y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}+z^{\frac{2}{9}}\right).$$

উদা. 3. $x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ধর, $m=x^{2^{n-2}}$ এবং $p=a^{2^{n-2}}$.

অতএব, $m^2=\left(x^{2^{n-2}}\right)^2=x^{2\times 2^{n-2}}=x^{2^{n-1}}$,

এবং $m^4=(m^2)^2=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2=x^{2\times 2^{n-1}}=x^{2^n}$.

এইরূপ, $p^2=a^{2^{n-1}}$ এবং $p^4=a^{2^n}$.

সুতরাং, $$\frac{x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}{x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}}$$

$$=\frac{m^4+p^2m^2+p^4}{m^2-pm+p^2}=\frac{(m^2+p^2)^2-p^2m^2}{m^2-pm+p^2}$$

$$=\frac{(m^2+p^2+pm)(m^2+p^2-pm)}{m^2-pm+p^2}$$

$$=m^2+pm+p^2$$

$$=x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}.$$

উদা. 4. $a^2+2b^2+(a+2b)\sqrt{ab}$ এবং $a^2-b^2+(a-b)\sqrt{ab}$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=a^2+a\sqrt{ab}+2b\sqrt{ab}+2b^2=a^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+2b^2$

$$=a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)+2b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}+2b^{\frac{3}{2}}\right).$$

দ্বিতীয় রাশি $=a^2+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-b^2=a^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-b^2$

$$=a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)-b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right).$$

সুতরাং, যেহেতু $a^{\frac{3}{2}}+2b^{\frac{3}{2}}$ এবং $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$ এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই;

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{x+(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{x+y}$.

প্রদত্ত লব $= x + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)$;

এবং প্রদত্ত হর $= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$.

উদা. 6. দেখাও যে,

$$\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}} + \frac{1}{1+x^{n-m}+x^{n-p}} + \frac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}} = 1.$$

প্রথম পদ $= \dfrac{x^{-m}}{x^{-m}(1+x^{m-n}+x^{m-p})} = \dfrac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$;

দ্বিতীয় পদ $= \dfrac{x^{-n}}{x^{-n}(1+x^{n-m}+x^{n-p})} = \dfrac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}}$;

এবং তৃতীয় পদ $= \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-m}+x^{p-n})} = \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}} + \frac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}} + \frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$$

$$= \frac{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}} = 1.$$

উদা. 7. $a^{-x}.(a^x+b^{-x}) = \dfrac{a^2b^2+1}{a^2b^2}$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমীকরণটির উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2};$$

অথবা, $\quad 1+(ab)^{-x} = 1 + a^{-2}b^{-2} = 1+(ab)^{-2}$.

সুতরাং, $\quad (ab)^{-x} = (ab)^{-2}$; $\quad \therefore \quad x = 2$.

উদা. 8. সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{ll} a^{x}.a^{y+1}=a^{7} & \ldots\ (1) \\ a^{2y}.a^{3x+5}=a^{20} & \ldots\ (2) \end{array}\right\}$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1879.]

প্রথম সমীকরণ হইতে, $a^{x+(y+1)}=a^{7}$;

$$\therefore\quad x+y+1=7. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $a^{2y+(3x+5)}=a^{20}$;

$$\therefore\quad 2y+3x+5=20. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, (3) এবং (4) হইতে, $x+y-6=0$
এবং $3x+2y-15=0$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{-15+12}=\frac{y}{-18+15}=\frac{1}{2-3},$$

অথবা, $\frac{x}{-3}=\frac{y}{-3}=-1.$ সুতরাং, $x=3$ এবং $y=3.$

উদা. 9. $a^b=b^a$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$; অধিকন্তু, $a=2b$ হইলে, দেখাও যে, $b=2$.

যেহেতু, $a^b=b^a$, $\therefore\ a=b^{\frac{a}{b}}$ [উভয়পক্ষের b-তম মূল নির্ণয় করিয়া]

অতএব, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}=\frac{a^{\frac{a}{b}}}{a}=a^{\frac{a}{b}-1}.$

আবার, যেহেতু, $a^b=b^a$,

অতএব, $a=2b$ হইলে, $(2b)^b=(b)^{2b}=(b^2)^b$; $\therefore\ 2b=b^2$; $\therefore\ b=2.$

উদা. 10. $x=\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+3bx-2a=0.$

$a+\sqrt{a^2+b^3}$ এর পরিবর্তে m এবং $a-\sqrt{a^2+b^3}$ এর পরিবর্তে n বসাইলে,

$$x^3=\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3+3m^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=m+n+3(mn)^{\frac{1}{3}}.\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)=m+n+3(mn)^{\frac{1}{3}}.x.$$

কিন্তু, $m+n=2a$;

এবং $(mn)^{\frac{1}{3}}=\{a^2-(a^2+b^3)\}^{\frac{1}{3}}=(-b^3)^{\frac{1}{3}}=-b$;

$\therefore \quad x^3=2a-3bx, \quad \therefore \quad x^3+3bx-2a=0.$

প্রশ্নমালা 104

গুণ কর :

1. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ কে $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ দ্বারা।

2. $a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

3. $1+ab^{-1}+a^2b^{-2}$ কে $1-ab^{-1}+a^2b^{-2}$ দ্বারা।

4. $x+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ কে $x-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

5. $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ কে $x^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ দ্বারা।

6. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

8. $a^m+3b^n-2c^p$ কে $a^m-3b^n+2c^p$ দ্বারা।

9. $a^{\frac{5}{2}}+8ab+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+2a^2b^{\frac{1}{3}}+32b^{\frac{5}{3}}+16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

10. $a^{\frac{5}{8}}+a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{8}}+x^{-\frac{5}{8}}+a^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{8}}$ কে
$a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{8}}-a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{8}}$ দ্বারা।

ভাগ কর :

11. $x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+6x-x^2$ কে $x^{\frac{3}{2}}+2-4x^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।

12. $8+12x^{-1}+2x^{-2}+2x^{-4}$ কে $x^{-2}-2x^{-1}+4$ দ্বারা।

13. $xy^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+3+2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-1}y$ কে $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ দ্বারা।

14. $a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b+ab^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$ কে $a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা।

15. $8x^{-n}-8x^n+5x^{3n}-3x^{-3n}$ কে $5x^n-3x^{-n}$ দ্বারা।

16. $8x^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}}-z+6x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$ কে $2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

17. দেখাও যে, $x^3+a^3+x^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}$ দ্বারা বিভাজ্য।

18. গুণ কর: $x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}$ কে $x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}}$ দ্বারা।

19. ভাগ কর: $x^{2^n}-y^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$ দ্বারা। [কলিঃ, 1879.]

20. সরল কর: $\left\{\left(a^m\right)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$.

21. ভাগ কর: $2x^{-\frac{1}{4}}+3x^{\frac{3}{4}}-7x^{\frac{1}{4}}+x-2x^{\frac{1}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}$ দ্বারা

22. $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

23. ভাগ কর: $x^{\frac{3n}{2}}-a^{\frac{3n}{2}}$ কে $x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}$ দ্বারা।

24. $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

25. ভাগ কর: $ax^{-1}+a^{-1}x+2$ কে $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1$ দ্বারা।

সরল কর:

26. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$

27. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-3y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}$.

28. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}$

29. $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

30. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\div\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$.

31. $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})-a^{-1}b^{-1}c^{-1}(b+c)(c+a)(a+b)$.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

32. $2^{x+7}=4^{x+2}$.

33. $(\sqrt{3})^{x+5}=(\sqrt[3]{3})^{2x+5}$.

34. $(\sqrt[5]{4})^{4x+7}=(\sqrt[11]{64})^{2x+7}$.

35. $(\sqrt[3]{25})^{2x+1}=(\sqrt[5]{125})^{x+6}$.

36. $\left.\begin{array}{l} 2^{3x-1}=4^{y-1} \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}$

37. $\begin{array}{ll} 9^{2x-3} & =(\sqrt{3})^{2y-x} \\ 2^{3x} & =4^{y} \end{array}$

38. $\left.\begin{array}{l} 4^{3y-1}=16^{x+y} \\ 3^{x+3y}=9^{2x+3} \end{array}\right\}$

39. $\left.\begin{array}{ll} 2^{x+y+z} & =8^{x+z-y} \\ 5^{3y+2} & =25^{x+z} \\ 3^{2x+2z+y} & =9^{3x+y} \end{array}\right\}$

40. $\begin{array}{ll} (\sqrt{a})^{x+y} & =(\sqrt[3]{a})^{y+z-1} \\ (\sqrt[3]{b})^{x+z-2} & =(\sqrt[5]{b})^{y+z} \\ (\sqrt[4]{c})^{y} & =(\sqrt[7]{c})^{x+y+1} \end{array}$

ত্রিংশ অধ্যায়

মূলাকর্ষণ-প্রক্রিয়া (Evolution) ঃ বর্গমূল ও ঘনমূল (Square and Cube roots) নির্ণয়

195. মূলাকর্ষণ (**Evolution** ঃ কোন সংখ্যার "মূল" নির্ণয় করার প্রণালীকে **"মূলাকর্ষণ"-প্রক্রিয়া** বলে।

অতএব, ইহা, **"শক্তি-উন্নয়ন"-প্রক্রিয়া** (Involution) এর, [অর্থাৎ, যে প্রক্রিয়া দ্বারা কোন সংখ্যাকে কোন নির্দিষ্ট শক্তিতে উন্নীত করা হয়, তাহার] ঠিক বিপরীত।

196. বীজগণিতীয় মিশ্ররাশির মূল নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম ঃ পূর্ব্ববর্ণিত সূত্রগুলি হইতে, অতি সহজেই, নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হওয়া যায় ঃ যথা,

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b\ ;$$
$$(a+b+c)^2=a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c\ ;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d\ ;$$

ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে,

$$(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c$$
$$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2\ ;$$

[x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

এক্ষণে, এই শেষোক্ত রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বন করিয়া নির্ণেয় বর্গমূলের বিভিন্ন পদগুলি ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা আলোচনা করা যাউক :

বর্গমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2, স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদ a^2x^4 এর বর্গমূল।

প্রদত্ত রাশি হইতে a^2x^4 বিয়োগ করিয়া, অবশিষ্ট $\{(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c\}$ পাওয়া যাইতেছে ; ইহাতে, x এর সর্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2 \times bx$, অর্থাৎ, $=$(বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ) $\times$ (বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ)। অতএব, ইহা হইতে দেখা যায় যে, বর্গমূলের প্রথম পদ নির্ণীত হওয়ার পর, উহার দ্বিতীয় পদও নির্ণয় করিতে পারা যায়।

এখন, উপরোক্ত অবশিষ্ট হইতে $(2ax^2+bx) \times bx$ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল, স্পষ্টই, $(2ax^2+2bx+c)c$ হয় ; ইহাতে, x এর সর্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2 \times c$, অর্থাৎ, $=$(বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ) $\times$ (বর্গমূলের তৃতীয় পদ)। কাজেই দেখা যাইতেছে যে, বর্গমূলের প্রথম পদ ও দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিবার পর, উহার তৃতীয় পদও নিরূপণ করা যাইতে পারে।

অতএব দেখা যায় যে, ax^2+bx+c এর বর্গ দেওয়া থাকিলে, উক্ত রাশিমালার বিভিন্ন পদগুলিকে, ঐ বর্গের অন্তর্গত পদসমূহ হইতে, ক্রমশঃ নির্ণয় করিবার একটি উপায় নির্দ্ধারিত হইল।

প্রক্রিয়াটি নিম্নপ্রদর্শিতরূপে সম্পন্ন করা যায় :

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \;\big(\; ax^2+bx+c \\
 & a^2x^4 \\
\hline
2ax^2+bx & 2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \\
 & 2abx^3+b^2x^2 \\
\hline
2ax^2+2bx+c & 2acx^2+2bcx+c^2 \\
 & 2acx^2+2bcx+c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

(1) প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের, অর্থাৎ a^2x^4 এর, বর্গমূল বাহির করিয়া, উহাকে নির্ণেয বর্গমূলের **প্রথম পদ**রূপে লিখ ;

(2) প্রদত্ত রাশি হইতে a^2x^4 বাদ দিয়া, অবশিষ্ট $2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2$ নামাও ;

(3) বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ, অর্থাৎ $2ax^2$ কে এই অবশিষ্টের বামদিকে, উহার ভাজকের একটি পদরূপে স্থাপন কর ;

(4) এখন, উপরোক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ $2abx^3$ কে বর্গমূলের প্রথম পদ ax^2 এর দ্বিগুণ (অর্থাৎ, $2ax^2$) দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল bx কে নির্ণেয় বর্গমূলের **দ্বিতীয় পদ**রূপে, এবং উল্লিখিত ভাজকেরও দ্বিতীয় পদরূপে, লিখ ;

(5) বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ (অর্থাৎ, bx) দ্বারা ভাজক, অর্থাৎ $2ax^2+bx$ কে গুণ করিয়া, গুণফলটিকে প্রথম অবশিষ্ট (অর্থাৎ, উপরোল্লিখিত অবশিষ্ট) হইতে বিয়োগ কর ;

(6) এই দ্বিতীয় অবশিষ্টকে নামাইয়া, উহার বামে, বর্গমূলের নির্ণীত অংশের (অর্থাৎ, ax^2+bx এর) দ্বিগুণকে (নূতন) একটি ভাজকের অংশরূপে লিখিয়া রাখ ;

(7) উল্লিখিত দ্বিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ $2acx^2$ কে, উপরোক্ত নূতন ভাজকের প্রথম পদ $2ax^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল c কে নির্ণেয় বর্গমূলের **তৃতীয় পদ**রূপে, এবং নূতন ভাজকেরও তৃতীয় পদরূপে, লিখ ;

(8) এখন, এই সম্পূর্ণ নূতন ভাজককে (অর্থাৎ, $2ax^2+2bx+c$ কে) বর্গমূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা গুণ করিয়া, গুণফলটিকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ কর।

এক্ষণে, অবশিষ্ট আর কিছুই রহিল না। অতএব, ax^2+bx+c ই নির্ণেয় বর্গমূল হইল।

টীকা। উপরোক্ত প্রক্রিয়াতে, প্রদত্ত রাশিটি x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারেই সাজান ছিল। তদ্রূপ, যে কোন রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রক্রিয়া আরম্ভ করিবার পূর্ব্বে, উহার পদগুলিকে উহার অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের অধঃক্রমিক বা ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া লইতে হইবে।

উদা. 1. নিম্নলিখিত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1.$$

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 & x^3+4x-1 \\
 & x^6 & \\ \hline
2x^3+4x & 8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 & \\
 & 8x^4 \qquad\quad +16x^2 & \\ \hline
2x^3+8x-1 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 & \\
 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 & \\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=x^3+4x-1.$

উদা. 2. $x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2$
$+2(y^3+y^2z+yz^2+z^3)x+y^4+2y^2z^2+z^4$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

প্রদত্ত রাশিমালা $= x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2 + 2yz + 3z^2)x^2$
$+ 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2$;

যেহেতু, রাশিমালাটি x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজান রহিয়াছে, অতএব, অবিলম্বে প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাইতে পারে :

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2+2yz+3z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \; (\; x^2 + (y+z)x + (y^2+z^2) \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 + (y+z)x & 2(y+z)x^3 + (3y^2+2yz+3z^2)x^2 \\
 & 2(y+z)x^3 + (\;y^2 + 2yz + \;z^2)x^2 \\
\hline
2x^2 + 2(y+z)x + (y^2+z^2) & 2(y^2+z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \\
 & 2(y^2+z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \\
\hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= x^2 + xy + xz + y^2 + z^2$.

উদা. 3. নিম্নলিখিত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^3}{9} - 2x^3 - \frac{4ax}{3}.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করিতে হইবে ; যথা,

$$
\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \; (\; \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3} \\
 & \frac{x^4}{4} \\
\hline
x^2 - 2x & -2x^3 + 4x^2 \\
 & -2x^3 + 4x^2 \\
\hline
x^2 - 4x + \frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \\
 & \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \\
\hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}$.

উদা. 4. $\frac{x^4}{4y^4} + \frac{4y^4}{x^4} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{x^2} + 3$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, উহার নিম্নলিখিত রূপ হইবে :

$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 3 + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{4y^4}{x^4} \;;$$

কারণ, ইহাতে বিভিন্ন পদান্তর্গত x এর বিভিন্ন শক্তির সূচকগুলি যথাক্রমে 4, 2, 0, -2 ও -4 ; এবং স্পষ্টতঃ, উহারা ক্রমহ্রাসমান সংখ্যা। কাজেই, প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাইতে পারে :

$$\frac{x^4}{4y^4}+\frac{x^2}{y^2}+3+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4}\Big(\frac{x^2}{2y^2}+1+\frac{2y^2}{x^2}$$

$$\frac{x^4}{4y^4}$$

$$\frac{x^2}{y^2}+1\Big)\frac{x^2}{y^2}+3$$

$$\frac{x^2}{y^2}+1$$

$$\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{2y^2}{x^2}\Big)2+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4}$$

$$2+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{x^2}{2y^2}+1+\frac{2y^2}{x^2}$.

উদা. 5. $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.]

রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাউক :

$$a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}}\Big(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}$$

$$a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}$$

$$2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}\Big)-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}}$$

$$-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}}$$

$$2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-2x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\Big)-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$$

$$-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}$.

প্রশ্নমালা 105

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $4x^2z^2+12xyz+9y^2$. 2. $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$.

3. $x^6-2x^4+2x^3+x^2-2x+1$. 4. $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$.

5. $4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4$. [কলিঃ, 1870.]

6. $9x^4-2x^3y+\frac{163}{9}x^2y^2-2xy^3+9y^4$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874.]

7. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$. 8. $\frac{1051x^2}{25}-\frac{6x}{5}-\frac{14x^3}{5}+49x^4+9$.

9. $x^4+\frac{4}{x^2}-2+4x-x^3+\frac{x^2}{4}$. 10. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x}-2-ax$.

11. $\frac{a^2}{4b^2}-\frac{a}{b}+\frac{4b^2}{a^2}-1+\frac{4b}{a}$. 12. $\frac{9a^2}{x^2}-\frac{6a}{5x}+\frac{101}{25}-\frac{4x}{15a}+\frac{4x^2}{9a^2}$.

13. $4x^4-8x^3y^2+4xy^4+y^6$. 14. $\frac{49x^2}{y^2}+\frac{y^2}{49x^2}-\frac{42x}{y}+\frac{6y}{7x}+7$.

15. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\frac{3}{4}$. 16. $25\frac{3}{7}-\frac{20x}{7y}+\frac{9y^2}{16x^2}-\frac{15y}{2x}+\frac{4x^2}{49y^2}$.

17. $x^2-2x^{\frac{3}{2}}+3x-2x^{\frac{1}{2}}+1$. 18. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$.

19. $a^2x^{-2}+2ax^{-1}+a^{-2}x^2+3+2a^{-1}x$.

20. $x^{\frac{3}{2}}+xy^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

21. $\frac{9x^3}{4}-5x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{179x^2y}{45}-\frac{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4xy^2}{25}$.

22. $a^{2m}-4a^{m+n}+4a^{2n}$.

23. $9a^{2m}+6a^{3m+1}+25c^{2m-4}-30a^mc^{m-2}+a^{4m+2}-10a^{2m+1}c^{m-2}$.

197. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, এই সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগ-সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় :

উদা. 1. $4-4c+2b+c^2-bc+\frac{b^2}{4}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = \frac{b^2}{4} - b(c-2) + (c^2 - 4c + 4)$$
$$= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left\{\frac{b}{2}(c-2)\right\} + (c-2)^2$$
$$= \left\{\frac{b}{2} - (c-2)\right\}^2 = \left(\frac{b}{2} - c + 2\right)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \dfrac{b}{2} - c + 2.$

উদা. 2. $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 12$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 12$$
$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}.$

উদা. 3. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^4 + b^4 - 2a^2b^2} + 4\dfrac{a}{a+b} \times \dfrac{b}{a-b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2};$$

$$\text{এবং ইহার লব} = \{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2\} + 4ab(a^2-b^2)$$
$$= (a^2-b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2) + 4a^2b^2$$
$$= \{(a^2-b^2) + 2ab\}^2;$$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(a^2+2ab-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \dfrac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2}.$

উদা. 4. $(ab+ac+bc)^2 - 4abc(a+c)$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \{b(a+c) + ac\}^2 - 4abc(a+c)$$
$$= b^2(a+c)^2 + a^2c^2 - 2abc(a+c)$$
$$= \{b(a+c) - ac\}^2 = (ab - ac + bc)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= ab - ac + bc.$

উদা. 5. $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2a^2c^2+2b^2d^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদত্ত রাশি $=a^4-2a^2(b^2+d^2-c^2)+\{b^4+c^4+d^4-2c^2(b^2+d^2)+2b^2d^2\}$;

এবং, ধনুর্বন্ধনীর (অর্থাৎ { } এর) অন্তর্গত রাশিমালাকে b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{উহা} = b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)$$
$$= b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^2-d^2)^2=\{b^2-(c^2-d^2)\}^2.$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=a^4-2a^2(b^2-c^2+d^2)+(b^2-c^2+d^2)^2$
$$=\{a^2-(b^2-c^2+d^2)\}^2=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=a^2-b^2+c^2-d^2$.

উদা. 6. $4\{(a^2-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি

$$=4\{(a^2-b^2)^2c^2d^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$$
$$+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2\}$$
$$=\{4(a^2-b^2)^2c^2d^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2\}+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+16a^2b^2c^2d^2\}$$
$$=(a^2-b^2)^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}+4a^2b^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$$
$$=\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$$
$$=(a^4+2a^2b^2+b^4)(c^4+2c^2d^2+d^4)$$
$$=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

প্রশ্নমালা 106

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর:

1. $25x^2y^2-40xy+16$. **2.** $49a^2x^4-42ab^2x^2+9b^4$.

3. $49a^6b^8+126a^5b^7+81a^8b^6$. **4.** $\frac{1}{4}x^8y^4-\frac{1}{5}x^7y^7+\frac{1}{25}x^6y^{10}$.

5. $\frac{25a^2b^2}{4}+\frac{c^4}{9}-\frac{5abc^2}{3}$. 6. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

7. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

8. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ac-4ab$.

9. $a^4+4b^4+9c^4+4a^2b^2-6a^2c^2-12b^2c^2$.

10. $4a^4+9b^4+25c^4-12a^2b^2+20a^2c^2-30b^2c^2$.

11. $x^2+\frac{a^2}{9}-bx+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{2ax}{3}$. 12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

13. $x^4+\frac{1}{x^4}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$. 14. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+3$.

15. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\sqrt{2}+2\frac{1}{2}$. 16. $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{a^2}{9x^2}-6\frac{x}{a}-\frac{2a}{3x}+3$

17. $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$. 18. $-2+a^{2\sqrt{2}}+a^{-2\sqrt{2}}$.

19. $a^2+b^2+c^2+d^2-2a(b-c+d)-2b(c-d)-2cd$.

20. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

21. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

22. $a^4+2a^3-a+\frac{1}{4}$.

23. $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$.

198. বীজগণিতীয় মিশ্ররাশির ঘনমূল নির্ণয় করিবার, সাধারণ নিয়ম :

স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে,

$$(ax^2+bx+c)^3=(ax^2+bx)^3+3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$$
$$=a^3x^6+3(a^2x^4)(bx)+3(ax^2)(bx)^2+(bx)^3$$
$$+3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3.$$

অতএব, উপরোক্ত রাশি হইতে উহার ঘনমূল (অর্থাৎ, ax^2+bx+c) নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বনে, ঐ ঘনমূলের পদসমূহ ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা দেখা যাউক :

ঘনমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2, স্পষ্টই, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের (অর্থাৎ, a^3x^6 এর) ঘনমূল। প্রদত্ত রাশি হইতে a^3x^6 বাদ দিলে, অবশিষ্টে x এর সর্ব্বোচ্চ-শক্তিবিশিষ্ট পদ $=3(a^2x^4)(bx)$, অর্থাৎ, $=3\times$(ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ)$\times$(ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ); অতএব, ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায় নির্দ্ধারিত হইল।

উপরোক্ত অবশিষ্ট হইতে $\{3(a^2x^4)+3(ax^2)(bx)+(bx)^2\}(bx)$ বাদ দিয়া, $3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$ রাশিটি পাওয়া গেল। ইহাকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট বলা যাউক। এখন, এই দ্বিতীয় অবশিষ্টে, x এর সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=3a^2x^4c$, অর্থাৎ, $=3\times$ (ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ) $\times$ (ঘনমূলের তৃতীয় পদ)। অতএব, ঘনমূলের তৃতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায়ও নিরূপিত হইল।

উপরোক্ত দ্বিতীয় অবশিষ্ট হইতে $\{3(ax^2+bx)^2+3(ax^2+bx)c+c^2\}c$ বিয়োগ করিলে, কিছুই অবশিষ্ট থাকে না।

অতএব, ax^2+bx+c কে নির্ণেয় ঘনমূলরূপে পাওয়া গেল।

নিম্নে একটি উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

উদাহরণ। $x^6-6x^5y+24x^4y^2-56x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর:

যেহেতু, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহ x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারেই সাজান আছে, অতএব, ঐ পদগুলির ক্রম পরিবর্ত্তন করিবার কোন আবশ্যকতা নাই।

ঘনমূলের **প্রথম পদ** = প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের ঘনমূল = x^6 এর ঘনমূল $=x^2$.

তৎপরে, প্রদত্ত রাশির দ্বিতীয় পদ, $-6x^5y$ কে $3x^4$ (অর্থাৎ, ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গের তিন গুণ) দ্বারা ভাগ করিয়া, ঘনমূলের **দ্বিতীয় পদ** পাওয়া গেল [পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রক্রিয়া দেখ]।

পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, $3x^4-6x^3y+4x^2y^2$ ভাজকটি, তৈয়ারী করা হইল। এই ভাজকটিকে $-2xy$ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল, অর্থাৎ $-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$ কে ইহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা হইতে বিয়োগ করা হইল [প্রক্রিয়া দেখ]; এবং অবশিষ্টকে রেখার নীচে লিখা হইল।

এখন, ঘনমূলের নির্ণীত অংশের বর্গের তিনগুণ, অর্থাৎ $3x^4-12x^3y+12x^2y^2$ কে নূতন একটি ভাজকের অংশরূপে, উপরোক্ত অবশিষ্টের বামদিকে লিখিয়া রাখ।

এই অবশিষ্টে, প্রথম পদ (অর্থাৎ, $12x^4y^2$) কে নূতন ভাজকের প্রথম পদ $3x^4$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল $4y^2$ কে ঘনমূলের **তৃতীয় পদ**রূপে লিখা হইল।

এখন, পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত নিয়মানুসারে, সম্পূর্ণ ভাজকটিকে তৈয়ারী করা হইল; এবং এই সম্পূর্ণ ভাজককে ঘনমূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে উহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা হইতে বিয়োগ করিবার পর, কিছুই অবশিষ্ট রহিল না।

অতএব, নির্ণেয় ঘনমূল $=x^2-2xy+4y^2$.

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6 \; (x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$x^6$$

$$- 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2)^2 = 3x^4$$

$$3 \times x^2 \times (-2xy) = -6x^3y$$

$$(-2xy)^2 = +4x^2y^2$$

$$3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2$$

$$- 6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$3 \times (x^2 - 2xy)^2 = 3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2 - 2xy) \times (4y^2) = +12x^2y^2 - 24xy^3$$

$$(4y^2)^2 = +16y^4$$

$$3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

প্রশ্নমালা 107

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ঘনমূল নির্ণয় কর :

1. $x^3+27x^2+243x+729$.
2. $27x^3-216x^2+576x-512$.
3. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$.
4. $33x^4-36x+x^6-63x^3+8-9x^5+66x^2$.
5. $8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27$.
6. $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$.
7. $c^6-63c^3x^3+8x^6-9c^5x+66c^2x^4-36cx^5+33c^4x^2$.

একত্রিংশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

199. সংজ্ঞা : দুইটি সমজাতীয় রাশির একটি, অপরটির কতগুণ বা কত অংশ, ইহা যে অখণ্ড (integral) বা খণ্ড (fractional) সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, সেই **শুদ্ধ** অর্থাৎ **অনবচ্ছিন্ন** (abstract) **সংখ্যা**টিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** (Ratio) বলে। যথা,

যেহেতু, 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিট উভয়ই সময়জ্ঞাপক রাশি, এবং প্রথমটি, দ্বিতীয়টি দ্বারা সূচিত সময়ের **তিনগুণ** সময় নির্দেশ করে, অতএব, 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিটের অনুপাত $=3$.

আবার, যেহেতু, 9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 3 ফুট দৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশ, অতএব, 9 ইঞ্চি ও 3 ফুটের অনুপাত $=\frac{1}{4}$.

পুনরায়, যেহেতু, 18 শি. পরিমিত অর্থের এক-তৃতীয়াংশের চারিগুণ লইলে £1. 4 শি. পরিমিত অর্থ পাওয়া যায়, অতএব, £1. 4 শি. ও 18 শি. এর অনুপাত $=\frac{4}{3}$; ইত্যাদি।

অতএব, দেখা যায় যে, দুইটি সমজাতীয় বদ্ধ অর্থাৎ অবচ্ছিন্ন (concrete) রাশির উভয়কেই একই এককে পরিবর্তিত করিলে, রাশিদ্বয়ের অনুপাত এরূপ একটি ভগ্নাংশ হয়, যাহার লব ও হর যথাক্রমে (ঐ এককের তুলনায়) প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির পরিমাণ

নির্দ্দেশ করে। এবং দুইটি শুদ্ধ অর্থাৎ অনবচ্ছিন্ন সংখ্যার অনুপাত, স্পষ্টতঃ, এরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব ও হর যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি দ্বারাই সূচিত হইয়া থাকে।

কোন সংখ্যা a, এবং অপর এক সংখ্যা b, ইহাদের অনুপাতকে $a : b$, এইরূপে প্রকাশ করা হয়; কাজেই, $a : b$ এবং $\frac{a}{b}$ উভয়ই একার্থবোধক। a ও b এর অনুপাতে, অর্থাৎ, $a : b$ তে, a কে (অর্থাৎ, প্রথম পদকে) **পূর্ব্বরাশি** (antecedent) এবং b কে (অর্থাৎ, দ্বিতীয় পদকে) **উত্তররাশি** (consequent) বলা হইয়া থাকে।

কোন অনুপাতের পূর্ব্বরাশি, উত্তররাশি হইতে বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, ঐ অনুপাতকে যথাক্রমে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality), **সাম্যানুপাত** (ratio of equality), বা **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

। যেহেতু, কোন অনুপাত একটি ভগ্নাংশ ভিন্ন আর কিছুই নহে, সুতরাং, ভগ্নাংশের ধর্ম্ম অনুসারে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অনুপাতের পদ দুইটিকে যে কোন একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে, অনুপাতের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না। যথা, $3 : 4$, $6 : 8$, $15 : 20$, $3n : 4n$, প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান।

অতএব, দুইটি অনুপাতের কোন্‌টি বড়, বা কোন্‌টি ছোট, তাহা নিরূপণ করাও কষ্টকর নহে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $2 : 3$, $4 : 5$ এবং $7 : 10$ অনুপাত তিনটি যথাক্রমে $20 : 30$, $24 : 30$ এবং $21 : 30$ অনুপাত তিনটির সমান বলিয়া, স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে, মধ্যম অনুপাতটিই সর্ব্বাপেক্ষা বড়, এবং প্রথমটি সর্ব্বাপেক্ষা ছোট।

200. অনুপাতের পদ দুইটির প্রত্যেকের সহিত একই ধনরাশি যোগ করিলে, লঘু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত, এবং গুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

ধর, প্রদত্ত অনুপাতটি $\frac{a}{b}$ দ্বারা সূচিত হইতেছে; এবং উহার পদদ্বয়ের সহিত x যোগ করিয়া $\frac{a+x}{b+x}$ এই নূতন অনুপাতটি পাওয়া গেল।

তাহা হইলে, $$\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)};$$

অতএব, দেখা যায় যে, b হইতে a ছোট হইলে, অন্তরফল ধনাত্মক, এবং বড় হইলে, অন্তরফল ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং, যদি $a < b$ হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ হইবে ;

এবং যদি $a > b$ হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$ হইবে।

কাজেই, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

টীকা। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, অনুপাতের পদদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে ছোট যে কোন একই ধনরাশি, উক্ত পদদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে বিয়োগ করিলে, লঘু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত এবং গুরু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

201. অনুপাতসমূহের সংযোগ বা সম্মিলন (Composition) : একাধিক অনুপাতের পূর্ব্বপদগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নূতন পূর্ব্বপদ এবং উত্তরপদগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নূতন উত্তরপদরূপে লইয়া যে নূতন অনুপাত পাওয়া যায়, তাহাকে প্রদত্ত অনুপাতসমূহের **সংযুক্ত,** বা **সম্মিলিত,** বা **মিশ্র অনুপাত** (compound ratio) বলে। যথা,

$3 : 4$, $8 : 9$ এবং $2x : 3y$ অনুপাত তিনটির 'সংযুক্ত অনুপাত'

$3 \times 8 \times 2x : 4 \times 9 \times 3y$, অর্থাৎ, $4x : 9y$ হইবে।

$a : b$ অনুপাতটিকে ইহারই (অর্থাৎ, $a : b$ এরই) সহিত সংযুক্ত করিয়া লব্ধ $a^2 : b^2$ অনুপাতটিকে $a : b$ এর **দ্বিগুণানুপাত** (duplicate ratio) বলে। এইরূপ, $a^3 : b^3$ কে $a : b$ এর **ত্রিগুণানুপাত** (triplicate ratio), $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ কে $a : b$ এর **দ্বিভাজিত অনুপাত** (sub duplicate ratio), $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ কে $a : b$ এর **ত্রিভাজিত অনুপাত** (sub-triplicate ratio), ইত্যাদিরূপ বলা হয়।

202. অনুপাতের আসন্ন মান (Approximate values of Ratios) : a এর তুলনায় x এর মান অত্যন্ত ছোট হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+x)^2 : a^2$ এর আসন্ন মান (approximate value) $a+2x : a$ এর সমান হইবে।

এখন, $\frac{(a+x)^2}{a^2} = \frac{a^2+2ax+x^2}{a^2} = 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}$;

অতএব, ইহা $= 1 + \frac{2x}{a}$, (আসন্ন মান লইয়া) ; কারণ, $\frac{x^2}{a^2}\left(\text{যাহা} = \frac{x}{a} \times \frac{x}{a}\right)$, $\frac{2x}{a}$ এর সহিত তুলনায় অত্যন্ত ছোট এবং কাজেই, 1 এর সহিত তুলনায় আরও ছোট, অতএব, উপেক্ষণীয়।

সুতরাং, আসন্ন মান লইলে, $\dfrac{(a+x)^2}{a^2}=1+\dfrac{2x}{a}=\dfrac{a+2x}{a}$. ... (1)

অনুসি.। (1) হইতে, স্পষ্টই দেখা য়ায় যে, $\sqrt{\dfrac{a+2x}{a}}=\dfrac{a+x}{a}$.

সুতরাং, a এর তুলনায় x অত্যন্ত ছোট হইলে, বুঝা যায় যে,

$$\sqrt{a+x} : \sqrt{a}=a+\tfrac{1}{2}x : a.$$

টীকা। a এর তুলনায় x অত্যন্ত ছোট হইলে, উপরোক্তরূপে দেখান যাইতে পারে যে, $(a+x)^3 : a^3=a+3x : a$; $(a+x)^4 : a^4=a+4x : a$; $(a+x)^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}=a+\frac{1}{3}x : a$; ইত্যাদি।

203. অমেয় রাশি (Incommensurable Quantities) : দুইটি রাশির অনুপাত যদি দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে উক্ত রাশি দুইটিকে **অমেয় রাশি** (incommensurable quantities) বলে। যথা, $\sqrt{3}$ এবং 2, এই রাশি দুইটি অমেয়; কারণ, এরূপ দুইটি অখণ্ড সংখ্যা কোন সময়েই পাওয়া যায় না, যাহাদের অনুপাত ঠিক $\sqrt{3} : 2$ এর সমান।

দুইটি অমেয় রাশির অনুপাত, কোন সময়েই, দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করিতে না পারিলেও, এরূপ দুইটি অখণ্ড সংখ্যা সকল সময়েই নির্ণয় করা সম্ভব, যাহাদের অনুপাত হইতে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের অনুপাতের পার্থক্য ইচ্ছানুরূপ ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1{\cdot}73205\ldots\ldots}{2}={\cdot}86602\ldots\ldots;$$

এবং কাজেই, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{86602}{100000}$ এবং $<\dfrac{86603}{100000}$;

সুতরাং, দেখা যায় যে, $\sqrt{3} : 2$ হইতে $86602 : 100000$, এবং $86603 : 100000$ এর পার্থক্য, $\dfrac{1}{100000}$ হইতেও ছোট। স্পষ্টতঃ, $\sqrt{3} : 2$ এর উপরোক্ত মান হইতে আরও ঘনিষ্ঠতর আসন্ন মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

টীকা। কোন সংখ্যাকে যদি দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে ঐ সংখ্যাটিকেও সচরাচর **অমেয় সংখ্যা** (incommensurable number) বলা হয়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $2:3$ এর সমান; এবং সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটির সহিত 9 যোগ করিলে, নূতন অনুপাতটি $3:4$ এর সমান হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

যেহেতু সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $2:3$ এর সমান, সুতরাং উহাদিগকে $2x$ এবং $3x$ দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে। কাজেই, প্রশ্নের দ্বিতীয় সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{2x+9}{3x+9}=\frac{3}{4}.$$

অতএব, $8x+36=9x+27$; $\therefore\ x=9$.

সুতরাং, সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে 18 ও 27 হইবে।

উদা. 2. $10x+3y : 5x+2y = 9:5$ হইলে, $x:y$ এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $$\frac{9}{5}=\frac{10x+3y}{5x+2y}=\frac{10.\frac{x}{y}+3}{5.\frac{x}{y}+2};$$

অতএব, $$45\cdot\frac{x}{y}+18=50\cdot\frac{x}{y}+15;$$

$$\therefore\ 5.\frac{x}{y}=3; \qquad \therefore\ \frac{x}{y}=\frac{3}{5}.$$

উদা. 3. x এবং y উভয়ই ধনাত্মক হইলে, নিম্নলিখিত অনুপাতদ্বয়ের কোনটি বড়?

$$x^3+y^3 : x^2+y^2, \text{ অথবা, } x^2+y^2 : x+y\ ?$$

এখন, $$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{xy^3+x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{xy(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x+y)}.$$

এখন, x, y হইতে বড়ই হউক আর ছোটই হউক, $(x-y)^2$ সকল সময়েই ধনাত্মক হইবে; অতএব, উপরিলব্ধ অন্তরফলটিও ধনাত্মক হইবে।

সুতরাং, $$x^3+y^3 : x^2+y^2 > x^2+y^2 : x+y.$$

উদা. 4. দুইটি সৈন্যদলে, যথাক্রমে 11000 ও 7000 সৈন্য আছে; যুদ্ধ করিবার পূর্ব্বে প্রত্যেক দলেই আরও 1000 সৈন্য আসিয়া যোগ দিল। কোন্ দলের সৈন্যসংখ্যা, অনুপাত হিসাবে, অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল? [কলি: প্রবেশিকা, 1879.]

প্রথম দলের, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্ব সংখ্যা $= 12000 : 11000 = 12 : 11$;

দ্বিতীয় দলের, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্ব সংখ্যা $= 8000 : 7000 = 8 : 7$.

এখন, যেহেতু, $12 : 11 = 84 : 77$ এবং $8 : 7 = 88 : 77$;

অতএব, $8 : 7 > 12 : 11$.

সুতরাং, পূর্ব্ব সংখ্যার সহিত তুলনায়, দ্বিতীয় দলের সৈন্যসংখ্যাই অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল।

প্রশ্নমালা 108

নিম্নলিখিত অনুপাতদ্বয়ের কোন্‌টি বৃহত্তর ?

1. $4 : 5$ অথবা $7 : 8$?

2. $7 : 10$ অথবা $11 : 14$?

3. $9 : 5$ অথবা $13 : 8$?

4. $22 : 27$ অথবা $32 : 45$?

5. $28 : 39$ অথবা $49 : 65$?

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির 'সংযুক্ত-অনুপাত' নির্ণয় কর :

6. $a : b$, $b : c$ এবং $c : d$.

7. $3 : 5$, $7 : 9$ এবং $15 : 28$.

8. $a+x : a-x$, $a^2+x^2 : (a+x)^2$ এবং $(a^2-x^2)^2 : a^4-x^4$.

9. $16 : 5$, $5 : 4$ এর ত্রিগুণানুপাত এবং $9 : 4$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত।

10. $25 : 18$, $81 : 49$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত, $2 : 3$ এর ত্রিগুণানুপাত এবং $7 : 5$ এর দ্বিগুণানুপাত।

11. $2x+5y : 3x+5y = 9 : 10$ হইলে, $x : y$ এর মান নির্ণয় কর।

12. $x : y = 3 : 4$ হইলে, $5x+9y : 16x+5y$ এর মান নির্ণয় কর।

13. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $7 : 8$ এবং উহাদের যোগফল 135 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

14. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $5 : 3$ এবং অন্তরফল 34 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

15. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $4 : 5$, এবং উহাদের প্রত্যেকটির সহিত 7 যোগ করিলে, সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত $5 : 6$ হয় ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

16. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $7 : 9$, এবং উহাদের প্রত্যেকটি হইতে 10 বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট দুইটির অনুপাত $8 : 11$ হয় ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

17. x এর মান কত হইলে, $23+x : 19+x$, 2 এর সমান হইবে ?

18. 25 : 37 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা 5 : 6 এ পরিণত হইবে ?

19. 29 : 38 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা 4 : 7 এ পরিণত হইবে ?

20. $a : b$ অনুপাতটির উভয় পদের সহিত কোন্ রাশি যোগ করিলে, উহা $c : d$ এ পরিণত হইবে ?

21. $a > x$ হইলে, দেখাও যে, $a^2 - x^2 : a^2 + x^2 > a - x : a + x$.

22. দেখাও যে, $a^2 + b^2 : a + b < a^2 - b^2 : a - b$.

নিম্নলিখিত অনুপাতের আসন্ন মান নির্ণয় কর :

23. $(226)^3 : (225)^3$. **24.** $\sqrt{(3546)} : \sqrt{(3542)}$.

25. তিনটি ছাত্র A, B, C প্রতি মাসে যথাক্রমে 15 টাকা, 20 টাকা এবং 25 টাকা করিয়া বৃত্তি পায় ; এবং উহা হইতে তাহারা প্রতিমাসে যথাক্রমে $8\frac{3}{4}$ টাকা, $11\frac{1}{4}$ টাকা এবং $15\frac{5}{8}$ টাকা ব্যয় করে। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সর্ব্বাপেক্ষা মিতব্যয়ী ?

সমানুপাত (Proportion)

204. যদি চারিটি রাশি এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাতের সমান, তাহা হইলে উক্ত রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (proportionals) বলে। যথা, $a : b = c : d$ হইলে, a, b, c, d রাশি চারিটিকে সমানুপাতী বলা হয়। এই সম্বন্ধকে, অনেক সময়, '$a : b :: c : d$', এইরূপে লিখা হয়, এবং 'a ও b এর অনুপাত যাহা, c ও d এর অনুপাতও তাহা' এইরূপে পড়া হইয়া থাকে।

উপরোক্ত সমানুপাতে, a ও d কে (অর্থাৎ, প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে) দুই **অন্ত্য রাশি** (extremes) এবং b ও c কে (অর্থাৎ দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে) দুই **মধ্য রাশি** (means) বলে। চতুর্থ রাশিকে, (অর্থাৎ, d কে) a, b, c এর **চতুর্থ সমানুপাতী** (fourth proportional)ও বলা হইয়া থাকে।

তিন বা তদধিক রাশি যদি এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাত, প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান, তাহা হইলে, ঐ রাশিসমূহকে **ক্রমিক** বা **ধারাবাহিক সমানুপাতী** (in continued proportion) বলে। যথা, a, b, c, d রাশি চারিটি

যদি এরূপ হয় যে, $a : b = b : c = c : d$, তাহা হইলে, উহারা ক্রমিক বা ধারাবাহিক সমানুপাতী হইবে।

তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে (অর্থাৎ, $a : b = b : c$ হইলে), b কে a ও c এর **মধ্য সমানুপাতী** (mean proportional), এবং c কে a ও b এর **তৃতীয় সমানুপাতী** (third proportional) বলে।

205. $a : b :: c : d$ হইলে, $ad = bc$ হইবে।

যেহেতু, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, অতএব, উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে, $ad = bc$ হয়,

সুতরাং, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদের অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল, মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান।

[বিপরীতক্রমে, $ad = bc$ হইলে, $a : b :: c : d$ হইবে ; কারণ, প্রদত্ত সমতার উভয় পক্ষকে bd দ্বারা ভাগ করিলেই $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হয়।]

অনুসি.। $a : b :: b : c$ হইলে, $ac = b^2$ হইবে ; অর্থাৎ, তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্যরাশির বর্গের সমান হইবে।

টীকা। উপরোক্ত ফলগুলি হইতে সহজেই দেখা যায় যে, চারিটি সমানুপাতীর যে কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে অবশিষ্টটি, অথবা, তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর যে কোন দুইটি দেওয়া থাকিলে অবশিষ্টটি অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা 109

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে তৃতীয় সমানুপাতীটি নির্ণয় কর :

1. 9. 6. **2.** 8, 12. **3.** 6, 15. **4.** 16, 24.

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে চতুর্থ সমানুপাতীটি নির্ণয় কর :

5. 6, 8, 15. **6.** 14, 24, 35. **7.** ·0014, 1·4, ·02.

নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতীটি নির্ণয় কর :

8. 4, 9. **9.** 7, 28. **10.** 6, 54.

206. $a : b :: b : c$ হইলে, $a : c :: a^2 : b^2$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$;

$\therefore \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; অথবা, $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$.

অর্থাৎ, তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর, প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত, প্রথম ও দ্বিতীয়ের দ্বিগুণিত (duplicate) অনুপাতের সমান।

টীকা। তদ্রূপ, $a : b = b : c = c : d$ হইলে, সহজেই দেখান যাইতে পারে যে, $a : d = a^3 : b^3$. [ইহার প্রমাণের ভার ছাত্রদের উপর রহিল।]

207. $a : b :: c : d$ হইলে, $b : a :: d : c$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$\therefore 1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$; অতএব, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদিগকে **ব্যস্তভাবে** (taken inversely) লইলেও, উহারা সমানুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে **ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলে।

208. $a : b :: c : d$ হইলে, $a : c :: b : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$; অথবা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদিগকে **একান্তরভাবে** (alternately) লইলেও, উহারা সমানুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে **একান্তরকরণ প্রক্রিয়া** (Alternando) বলে।

209. $a : b :: c : d$ হইলে, $a+b : b :: c+d : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$; অথবা, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টির সহিত দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টির সহিত চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **যৌগিক প্রক্রিয়া** (Componendo) বলে।

210. $a : b :: c : d$ হইলে, $a-b : b :: c-d : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$; অথবা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফলের সহিত দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফলের সহিত চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ-প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

অনুসি.। $a : b :: c : d$ হইলে, $a : a-b :: c : c-d$.

কারণ, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

সুতরাং, ব্যস্তভাবে লইলে, (taken inversely), $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$.

অতএব, $\frac{b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{d}{c-d}\times\frac{c}{d}$: অথবা, $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথমের সহিত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরফলের অনুপাত, তৃতীয়ের সহিত তৃতীয় ও চতুর্থের অন্তরফলের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **রূপান্তর-প্রক্রিয়া** (Convertendo) বলে।

211. $a : b :: c : d$ হইলে, $a+b : a-b :: c+d : c-d$ হইবে।

নিয়ম 209 হইতে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. ... ... (1)

নিয়ম 210 হইতে, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. ... ... (2)

কাজেই, (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অনুপাতের সমান হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে অনেক সময়ে **'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) বলে।

টীকা। এই নিয়মে প্রমাণিত ফলটি কতিপয় বিশেষ শ্রেণীর সমীকরণ সমাধানের পক্ষে অত্যন্ত উপযোগী। নিম্নে ইহার দৃষ্টান্ত দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর: $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$

'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+1}{b-1}.$

অতএব, $\dfrac{a+x}{a-x}=\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^2=\dfrac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}.$

আবার, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা,

$\dfrac{2a}{2x}=\dfrac{2(b^2+1)}{4b}$; অথবা, $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b^2+1}{2b}$;

$\therefore\ x(b^2+1)=2ab$; $\therefore\ x=\dfrac{2ab}{b^2+1}.$

উদা. 2. সমাধান কর: $\dfrac{1-ax}{1+ax}\cdot\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=1.$

এখন, $\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=\dfrac{1+ax}{1-ax}$; $\therefore\ \dfrac{1+bx}{1-bx}=\dfrac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}.$

সুতরাং, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{1}{bx}=\dfrac{1+a^2x^2}{2ax}$;

$\therefore\ b(1+a^2x^2)=2a$, অথবা, $a^2x^2=\dfrac{2a}{b}-1$;

$$\therefore\ x=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

উদা. 3. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[এলাহাবাদ, 1892.]

প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{2b}{a+b}$, এবং $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{2a}{a+b}.$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা,

$\dfrac{x+2a}{x-2a}=\dfrac{a+3b}{b-a}$, এবং $\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{3a+b}{a-b}.$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a+3b)}{a-b} + \frac{3a+b}{a-b}$

$$= \frac{2(a-b)}{a-b} = 2.$$

টীকা। অনুরূপে সমাধানের জন্য 171 নিয়মের উদা. 2 দেখ।

উদা. 4. $(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$ হইলে, দেখাও যে, $a : b :: c : d$.

প্রদত্ত সম্বন্ধানুসারে, $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d} = \frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$.

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d};$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}. \quad \text{[একান্তরকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা]}$$

এখন, দ্বিতীয়বার 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

উদা. 5. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হইলে,

দেখাও যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হইবে।

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}};$$

$$\therefore \frac{m+1}{m-1} = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া'র দ্বিতীয়বার প্রয়োগ দ্বারা,

$$\frac{m}{1} = \frac{x^3+3x}{3x^2+1};$$

$$\therefore m(3x^2+1) = x^3+3x,$$

সুতরাং, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0.$

প্রশ্নমালা 110

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=5\\ 2x+3y=36\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{3x-5y}{3x+5y}=\dfrac{1}{4}\\ 4x-9y=19\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5x-7y}{5x+7y}=\dfrac{1}{7}\\ 3x-5y=18\end{array}\right\}$

4. $16\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^3=\dfrac{a+x}{a-x}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

5. $\dfrac{2x+\sqrt{4x^2-1}}{2x-\sqrt{4x^2-1}}=4.$

6. $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{3}.$

7. $\dfrac{\sqrt{36x+1}+\sqrt{36x}}{\sqrt{36x+1}-\sqrt{36x}}=9.$

8. $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\dfrac{62}{63}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}.$

9. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}=5.$

10. $\dfrac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b}{x}.$

11. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}=b.$

প্রমাণ কর যে, $a:b::c:d$,

12. $(a+3b+2c+6d)(a-3b-2c+6d)$
$=(a-3b+2c-6d)(a+3b-2c-6d)$ হইলে।

13. $(2a+b+4c+2d)(2a-b-4c+2d)$
$=(2a-b+4c-2d)(2a+b-4c-2d)$ হইলে।

14. $x=\dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হইলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0.$

15. $x=\dfrac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ হইলে, $\dfrac{x+\sqrt{8}}{x-\sqrt{8}}+\dfrac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ এর মান নির্ণয় কর।

212. একটি অত্যাবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা : p, q, r, n যে কোন সংখ্যাই নির্দেশ করুক না কেন, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের প্রত্যেকে $\left(\dfrac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ এর সমান।

মনে কর, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ এর প্রত্যেকে k এর সমান; তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, $a=bk$, $c=dk$ এবং $e=fk$ হইবে।

অতএব, $pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n$,
$qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$,
এবং $re^n=r(fk)^n=rf^nk^n$,
$\therefore\ pa^n+qc^n+re^n=(pb^n+qd^n+rf^n).k^n$;

কাজেই, $k^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}$.

সুতরাং, $k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$; অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি.। p, q, r, n এর প্রত্যেককেই 1 বলিয়া ধরিলে, দেখা যায় যে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}.$$

এইরূপে, p, q, r, n এর বিশেষ বিশেষ মানের জন্য অনুরূপ ফলসমূহ নির্ণয় করা যায়।

টীকা। উপরোক্ত তিনটি সমান অনুপাতের বেলায় প্রতিপন্ন প্রতিজ্ঞাটিকে যে কোন সংখ্যক সমান অনুপাতের বেলায়ও, অনুরূপ যুক্তিসাহায্যে প্রমাণ করা যাইতে পারে। ছাত্রগণের পক্ষে, এই জাতীয় প্রশ্ন সমাধান করিবার সময়, উপরিলব্ধ ফলের প্রয়োগ না করিয়া, প্রত্যেকক্ষেত্রেই উপরিপ্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, ফলগুলি নির্ণয় করা উচিত। এই উদ্দেশ্যে নিম্নে কতকগুলি প্রশ্ন সন্নিবেশিত হইল।

প্রশ্নমালা 111

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি অনুপাত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমান :

1. $\frac{a-c+e}{b-d+f}$.
2. $\frac{a+3c-5e}{b+3d-5f}$.
3. $\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$.
4. $\frac{ka+lc+me}{kb+ld+mf}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1875.]
5. $\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.
6. $\left(\frac{a^3-2c^3+3e^3}{b^3-2d^3+3f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.
7. $\frac{\sqrt[3]{a^3+c^3+e^3}}{\sqrt[3]{b^3+d^3+f^3}}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমান :

8. $\left(\frac{a^{-1}+c^{-1}+e^{-1}+g^{-1}}{b^{-1}+d^{-1}+f^{-1}+h^{-1}}\right)^{-1}$. 9. $\sqrt[4]{\frac{a^4-2c^4+3e^4-4g^4}{b^4-2d^4+3f^4-4h^4}}$.

10. $\sqrt{\left(\frac{3a^{-2}-7c^{-2}-8e^{-2}+15g^{-2}}{3b^{-2}-7d^{-2}-8f^{-2}+15h^{-2}}\right)^{-1}}$.

213. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $x:y::m^2:n^2$ এবং $m:n::\sqrt{p^2+x^2}:\sqrt{p^2-y^2}$ হইলে, দেখাও যে, $p^2:xy::x+y:x-y$.

এখন, $\frac{x}{y}=\frac{m^2}{n^2}=\frac{p^2+x^2}{p^2-y^2}$;

$\therefore$ $x(p^2-y^2)=y(p^2+x^2)$, [নিয়ম 205]

অতএব, $p^2(x-y)=xy(x+y)$;

$\therefore$ $\frac{p^2}{xy}=\frac{x+y}{x-y}$;

অর্থাৎ, $p^2:xy::x+y:x-y$.

উদা. 2. $a:b::c:d$ হইলে, দেখাও যে,

$$ma+nc:mb+nd::(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}:(b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}.$$ [কলিঃ, 1880.]

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore$ $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}$,

অতএব, প্রত্যেকটি $=\frac{ma+nc}{mb+nd}$. [নিয়ম 212]

আবার, যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

$\therefore$ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$,

অতএব, প্রত্যেকটি $=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$. [নিয়ম 212]

সুতরাং, $\dfrac{ma+nc}{mb+nd}=\dfrac{ma}{mb}=\dfrac{a}{b}$, ... (1)

এবং $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$. ... ... (2)

অতএব, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

উদা. 3. $\dfrac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\dfrac{y}{(c-a)(c+a-2b)}=\dfrac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ হইলে, $x+y+z$ এর মান নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

অতএব, $x=k(b-c)(b+c-2a)=k\{(b^2-c^2)-2a(b-c)\}$,

$y=k(c-a)(c+a-2b)=k\{(c^2-a^2)-2b(c-a)\}$,

$z=k(a-b)(a+b-2c)=k\{(a^2-b^2)-2c(a-b)\}$.

সুতরাং, $x+y+z=k[\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}-2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$

$=0.$

উদা. 4. $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

অতএব, $(ay-bx)c=kc^2$,

$(cx-az)b=kb^2$,

$(bz-cy)a=ka^2$.

সুতরাং, যোগ করিয়া, $k(a^2+b^2+c^2)=0$; $\therefore\ k=0$.

অতএব, $ay-bx=0$; $\therefore\ ay=bx$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ ... (1)

আবার, $cx-az=0$; $\therefore\ cx=az$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$. ... (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

উদা. 5. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে,

দেখাও যে, $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$.

প্রদত্ত সম্বন্ধানুসারে,

(i) $b^2=ac$; (ii) $c^2=bd$; (iii) $bc=ad$. [নিয়ম 205]

এখন, $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

$$=(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ac)+(d^2+b^2-2bd)$$
$$=2(b^2-ac)+2(c^2-bd)+a^2+d^2-2bc$$
$$=a^2+d^2-2bc \quad \text{[(i) এবং (ii) হইতে]}$$
$$=a^2+d^2-2ad \quad \text{[(iii) হইতে]}$$
$$=(a-d)^2.$$

উদা. 6. $a:b::c:d$ হইলে,

দেখাও যে, $4(a+b)(c+d)=bd\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2$. [কলিঃ, 1874.]

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; [যোগক্রিয়া]

অতএব, স্পষ্টতঃ $\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}=\frac{2(a+b)}{b}=\frac{2(c+d)}{d}$.

সুতরাং, $\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2=\frac{2(a+b)}{b}\times\frac{2(c+d)}{d}$

$$=\frac{4(a+b)(c+d)}{bd};$$

$$\therefore \quad bd\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2=4(a+b)(c+d).$$

উদা. 7. $a:b::p:q$ হইলে,

দেখাও যে, $a^2+b^2:\frac{a^3}{a+b}::p^2+q^2:\frac{p^3}{p+q}$.

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে

$\frac{b}{a}=\frac{q}{p}$; এবং, $\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{q^2}{p^2}$.

সুতরাং, (i) $\frac{a+b}{a}=\frac{p+q}{q}$, এবং (ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2}$.

(i) এবং (ii) দ্বারা সূচিত অনুপাত দুইটিকে 'সংযুক্ত' করিয়া,

$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{a^3}=\frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p^3},$$

অথবা, $$\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{a^3}{a+b}\right)}=\frac{p^2+q^2}{\left(\frac{p^3}{p+q}\right)};$$

অর্থাৎ, $$a^2+b^2 : \frac{a^3}{a+b} :: p^2+q^2 : \frac{p^3}{p+q}.$$

উদা. 8. $m : n :: p : q$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $\frac{(m-n)(m-p)}{m}=(m+q)-(n+p)$. [কলিঃ, 1859.]

এখন, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$; $\therefore \frac{m-n}{n}=\frac{p-q}{q}$;

আবার, $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$; $\therefore \frac{m-p}{p}=\frac{n-q}{q}$.

সুতরাং, $$\frac{(m-n)(m-p)}{np}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2},$$

অথবা, $$\frac{(m-n)(m-p)}{mq}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2} \quad [\because np=mq]$$

$$\therefore \frac{(m-n)(m-p)}{m}=\frac{pn-q(n+p)+q^2}{q}$$

$$=\frac{mq+q^2-q(n+p)}{q} \quad [\because pn=mq].$$

$$=(m+q)-(n+p).$$

উদা. 9. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে,

দেখাও যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

$$\left.\begin{array}{l} k^2b^2=a^2 \\ k^2c^2=b^2 \\ k^2d^2=c^2 \end{array}\right\} \quad \therefore k^2(b^2+c^2+d^2)=a^2+b^2+c^2,$$

$$\therefore k^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2+d^2}; \quad \dots \quad (1)$$